

La visione spaziale (1)



Corso di Principi e Modelli della Percezione

Prof. Giuseppe Boccignone

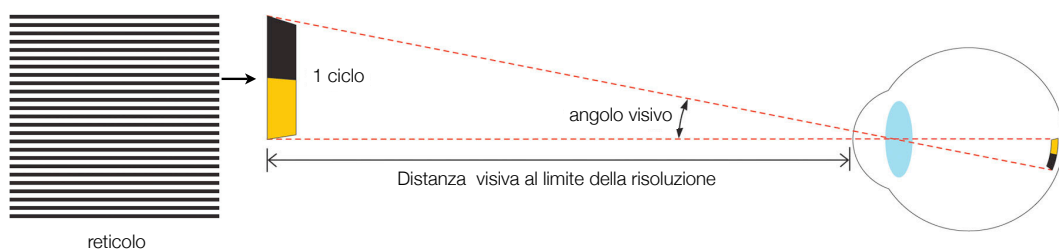
Dipartimento di Scienze dell'Informazione
Università di Milano

boccignone@dsi.unimi.it

http://homes.dsi.unimi.it/~boccignone/GiuseppeBoccignone_webpage/Modelli_Percezione.html

Acuità visiva

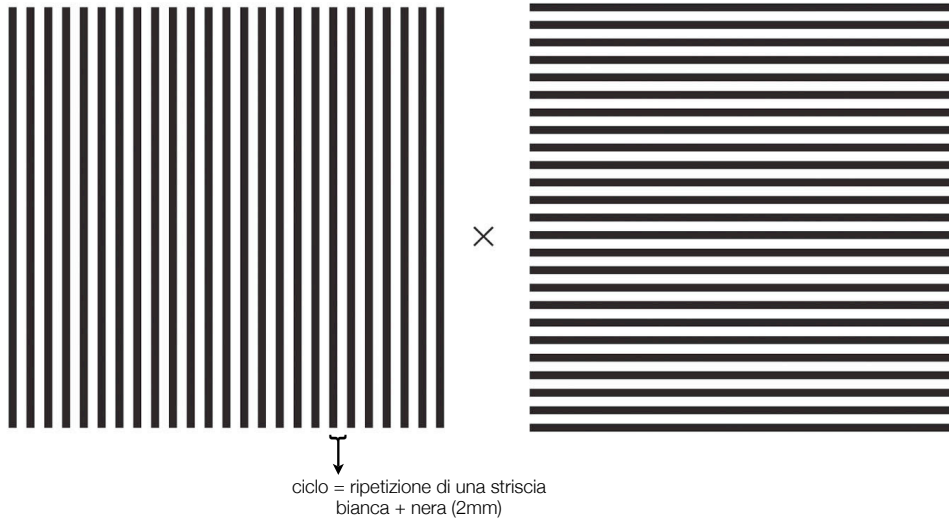
- Acuità visiva (potere separatore): minima distanza a cui due oggetti sono separabili. Dipende da:
 - (a) minima distanza fra i fotorecettori;
 - (b) diffrazione
- Tecnicamente: il più piccolo angolo visivo sotteso da un ciclo del reticolo che è possibile percepire (risolvere)



Acuità visiva

//reticoli

- Con una buona vista, risolvibili quando un ciclo sottende un angolo di 0.017°



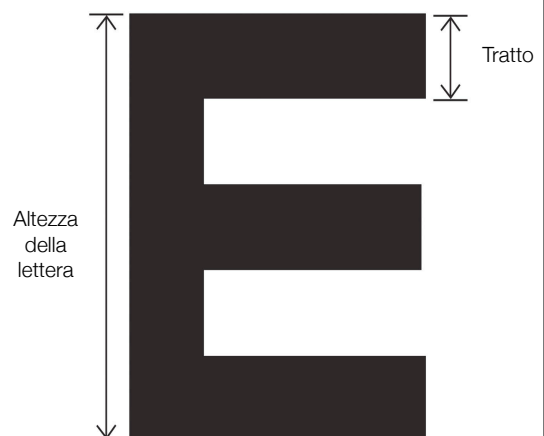
Acuità visiva

//misura oculistica

- Herman Snellen inventò il metodo per misurare l'acuità visiva nel 1862

$$\frac{\text{distanza critica del paziente}}{\text{distanza critica del paziente "normale"}}$$

- A 6 metri (20 piedi) si varia la dimensione delle lettere
- Vista normale 20/20 (Italia: 10/10)



Acuità visiva

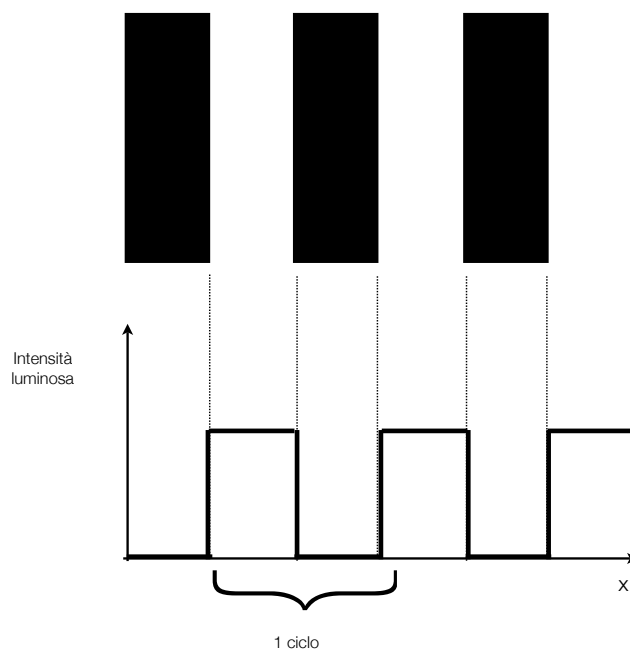
//misura oculistica



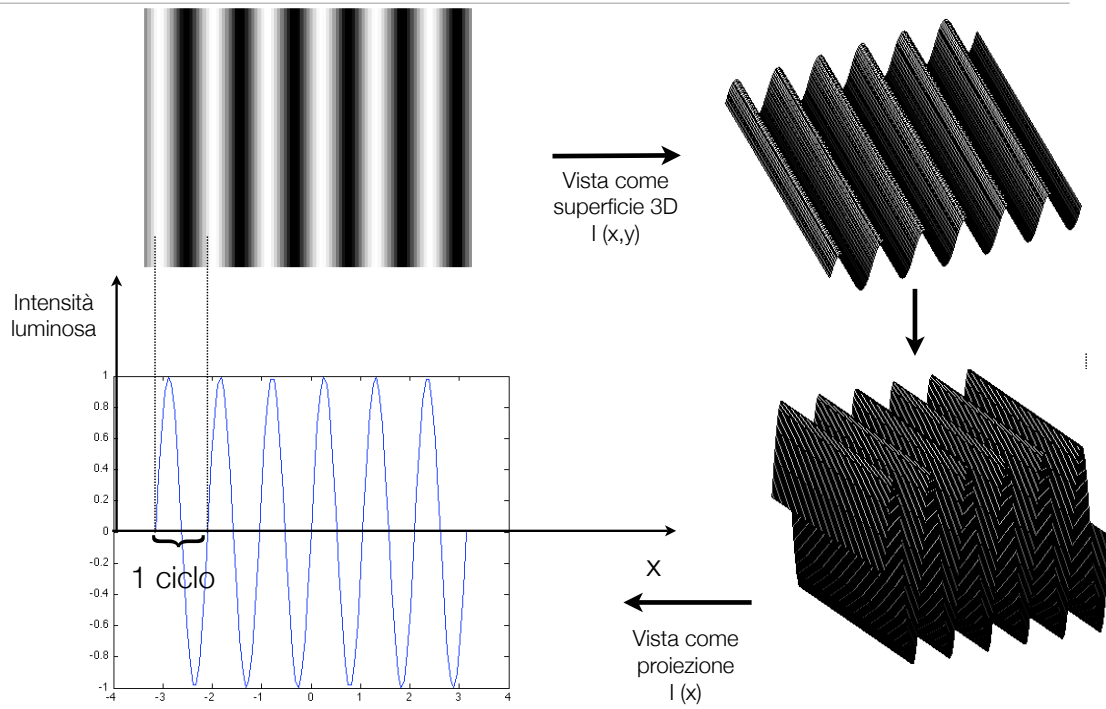
- Lettera da 10/10:
 - sottende un angolo di $5' = 5/60^\circ = 0.083^\circ$ nell'occhio
- Tratto della lettera:
 - sottende un angolo di $1'$ (0.017°)

Reticoli

- **Frequenza Spaziale:**
Il numero di cicli di un reticolo per unità di angolo visivo (usualmente misurato in gradi)



Reticoli sinusoidali



Reticoli sinusoidali

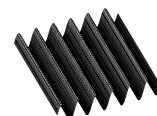
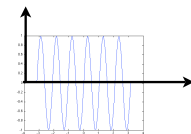
```

clear all; close all;
n=101;
x=linspace(-pi, pi, n); %definisco l'asse delle x
sf=6; %definisco la frequenza spaziale in cicli

sinewave=sin(x*sf); %genero la senoide
figure(1) %plotto la senoide
plot(x, sinewave);

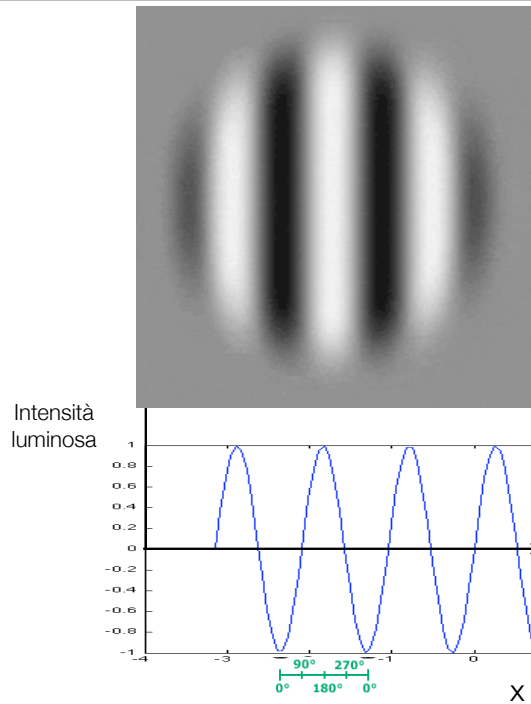
figure(2)
onematrix=ones(size(sinewave)); %genero un vettore riga di 1
sinewave2D=(onematrix'*sinewave); %genero una matrice (immagine 2D) come prodotto esterno
colormap(gray)
imagesc(sinewave2D) %visualizzo la matrice (immagine 2D) a livelli di grigio
axis off;

figure(3)
[X,Y] = meshgrid(linspace(-pi,pi,n)); %genero una mesh 2D (X,Y)
sinewave2D = sin(sf*X); %assegno la coordinata Z con i valori della senoide
colormap(gray)
surf(X,Y,sinewave2D) %plotto la superficie in 3D
axis off;
    
```



Reticoli sinusoidali

//fase

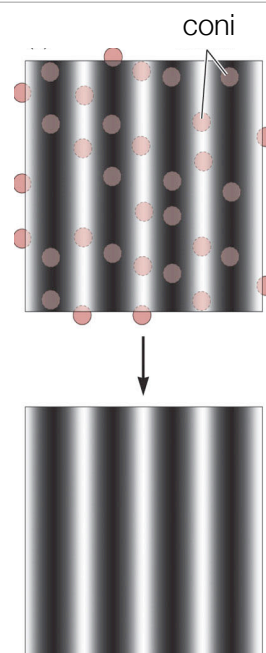


Fase: posizione relativa dell'onda sinusoidale

Reticolo sinusoidale

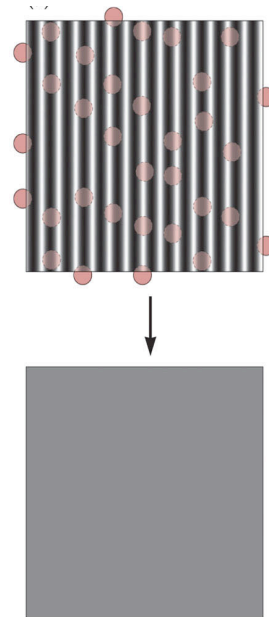
//campionamento

- Il sistema visivo campiona il reticolo in maniera discreta
- In questo caso, il campo recettivo è più piccolo delle strisce ed è possibile ricostruire il reticolo



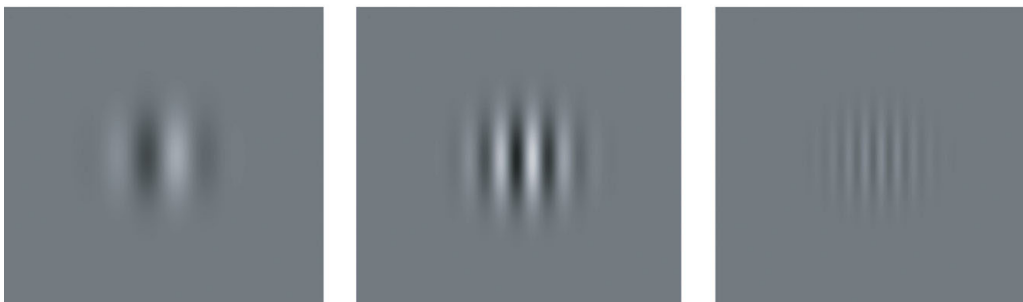
Reticolo sinusoidale //campionamento

- Il sistema visivo campiona il reticolo in maniera discreta
- In questo caso, il campo recettivo è più grande delle strisce e non è possibile ricostruire il reticolo
- Bianco e nero cadono su un singolo recettore: il risultato è grigio



Reticolo sinusoidale //frequenza e contrasto

- **Frequenza Spaziale:** Il numero di cicli di un reticolo per unità di angolo visivo (usualmente misurato in gradi)



angolo visivo fra 2 strisce bianche:

0.25° a 120 cm

sf = 2 cicli/grado

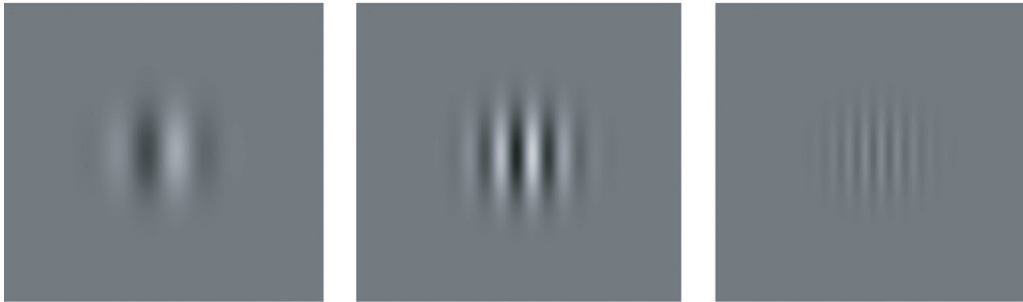
sf = $1 / 0.25 = 4$ cicli/grado

sf = 8 cicli/grado

Reticolo sinusoidale

//frequenza e contrasto

- **Problema:** E' vero che più larghe sono le strisce (minore sf) e più facile è distinguerle?



angolo visivo fra 2 strisce bianche:

0.25° a 120 cm

sf = 2 cicli/grado

sf = 1 / 0.25 = 4 cicli/grado

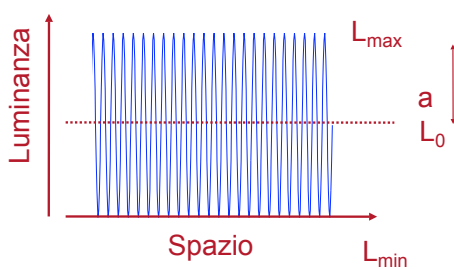
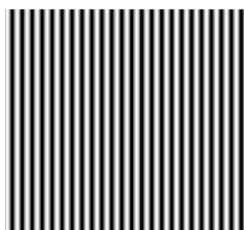
sf = 8 cicli/grado

Reticolo sinusoidale

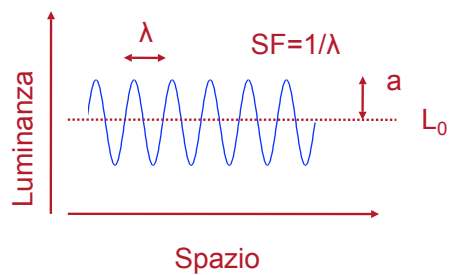
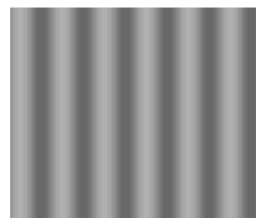
//frequenza e contrasto

- **Contrasto:**
$$c = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} = \frac{a}{L_0}$$

Alto contrasto



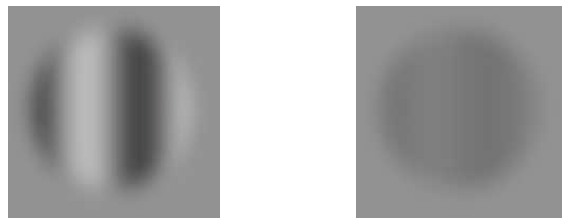
Basso contrasto



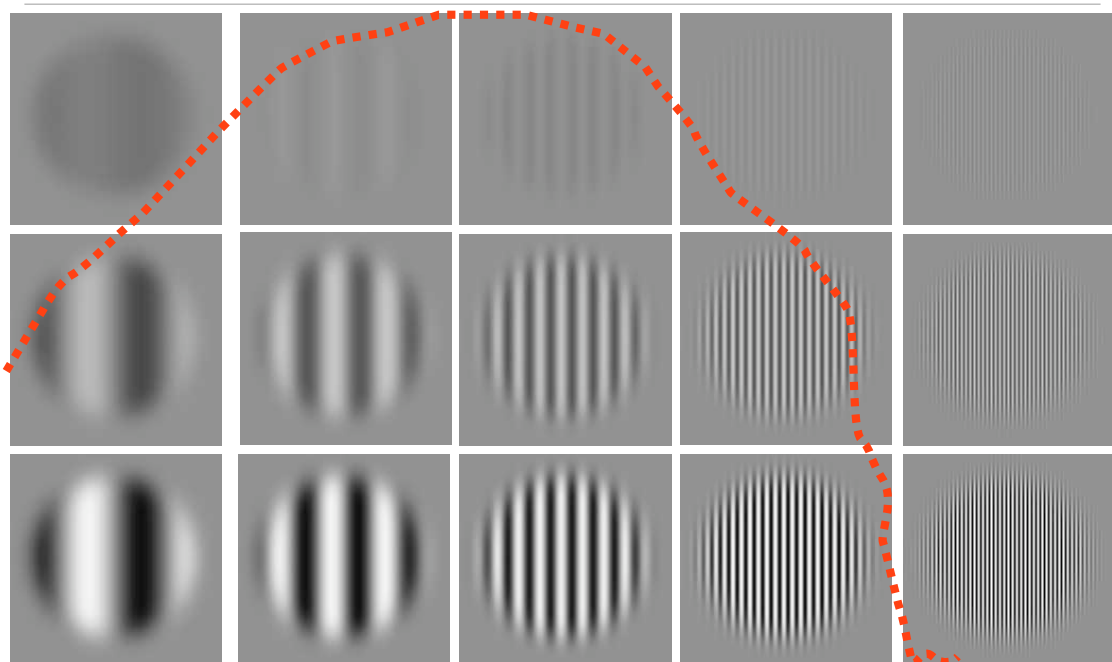
Reticolo sinusoidale //frequenza e contrasto

- **Contrasto:**
$$c = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} = \frac{a}{L_0}$$

- Soglia di contrasto: quantità minima di contrasto necessaria alla rilevazione di un'immagine



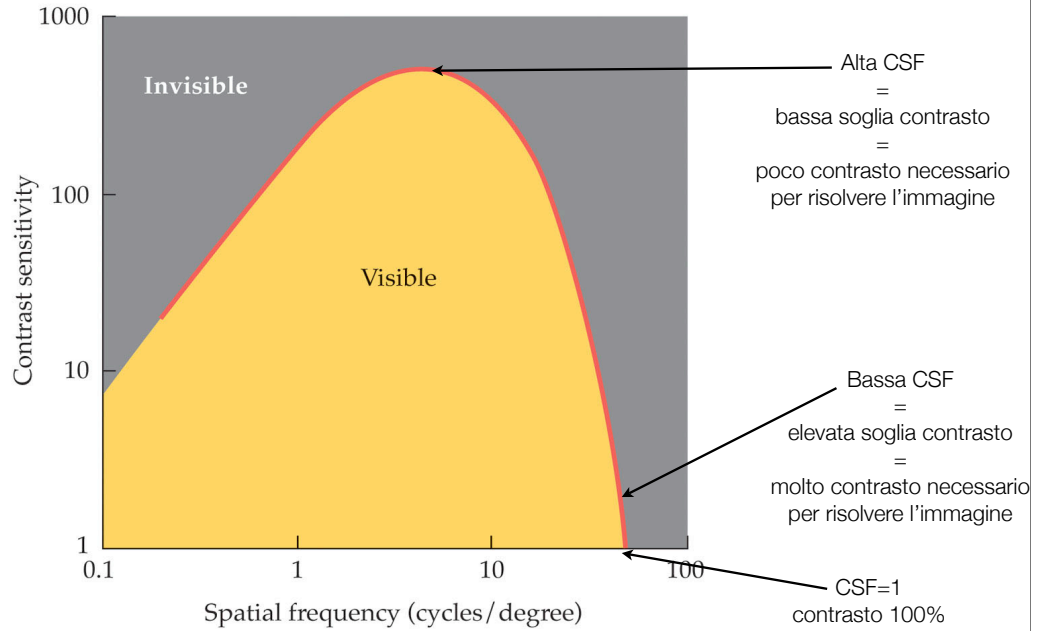
Reticolo sinusoidale //frequenza e contrasto



Reticolo sinusoidale

//frequenza e contrasto: FSC

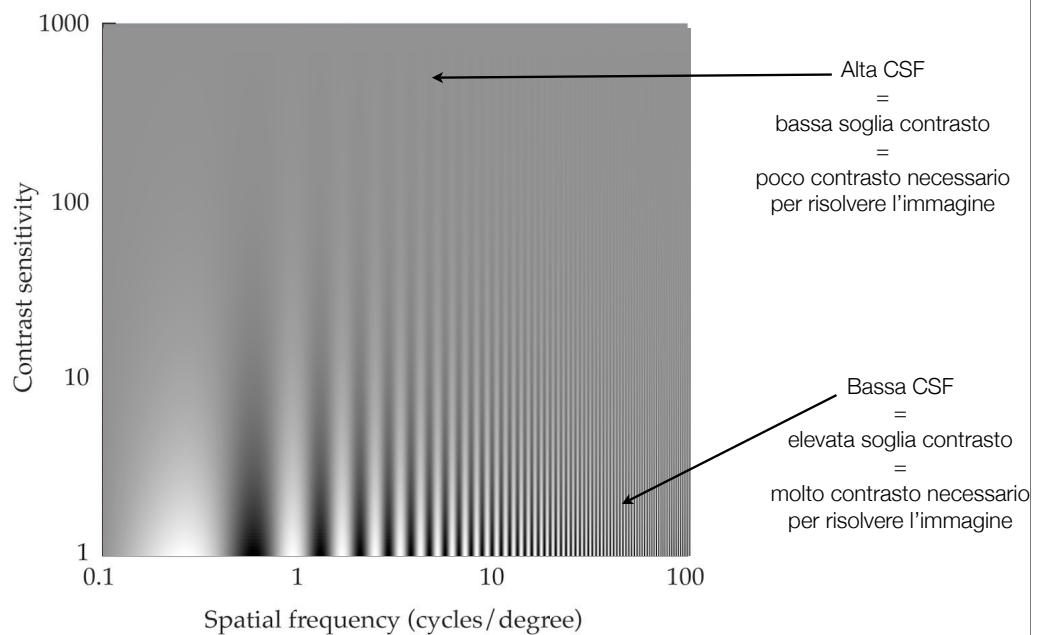
- **Funzione di sensibilità al contrasto (FSC):** $1 / \text{soglia di contrasto}$



Reticolo sinusoidale

//frequenza e contrasto: FSC

- **Funzione di sensibilità al contrasto (FSC):** $1 / \text{soglia di contrasto}$

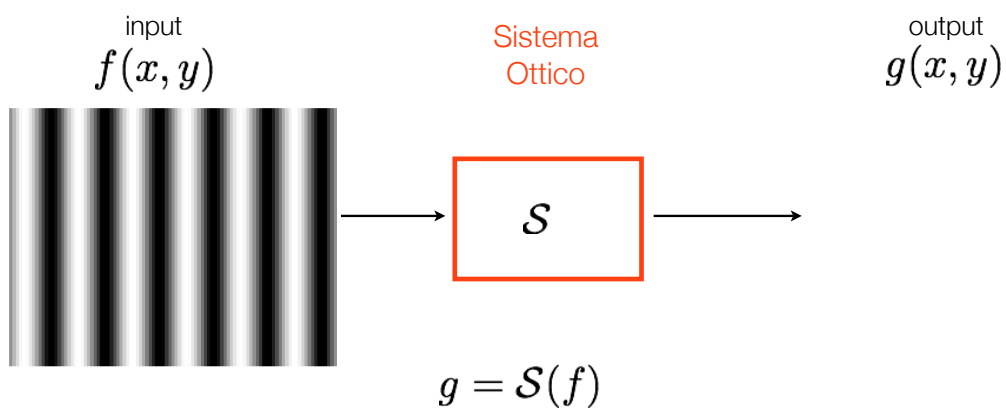


Reticolo sinusoidale

- Perché usare reticoli sinusoidali?
 - Patterns di strisce con “strani” bordi sono abbastanza comuni
 - Il bordo di un oggetto produce una singola striscia (spesso sfumata da un'ombra) come immagine retinica
 - Il sistema visivo sembra decomporre le immagini in un vasto numero di componenti, ognuna formata da reticoli sinusoidali di una particolare frequenza
 - Esiste una teoria matematica forte per descriverli
 - Trasformate di Fourier
 - Funzioni di Gabor
 - Wavelets

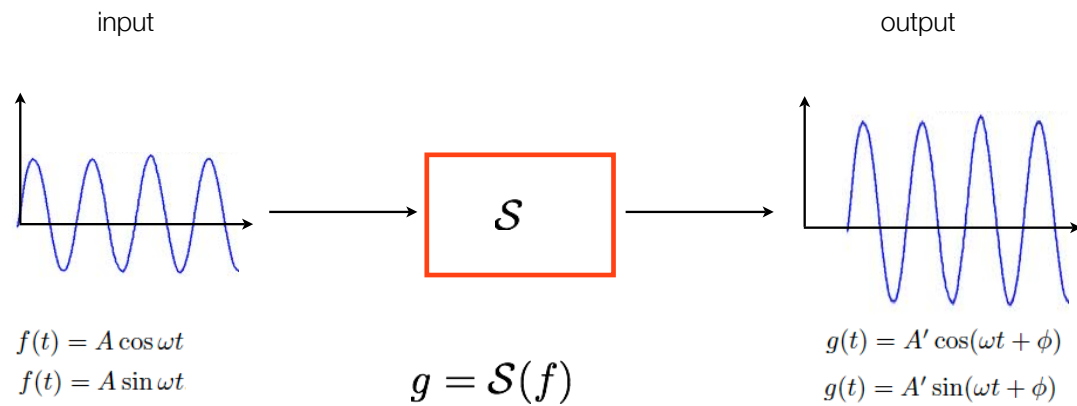
Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Cosa succede quando diamo in ingresso a S un pattern sinusoidale?



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Consideriamo il caso unidimensionale

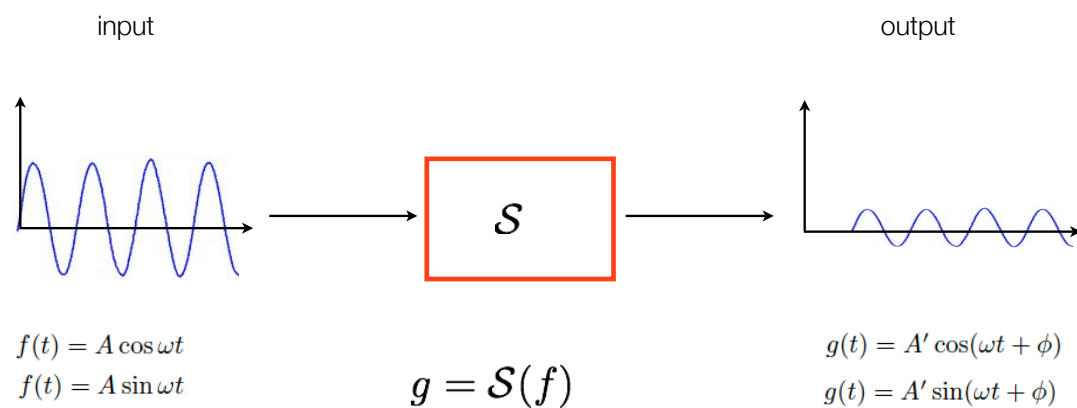


- Risultato:

- output scalato (ampiezza diversa) e traslato in fase
- stessa frequenza

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Consideriamo il caso unidimensionale



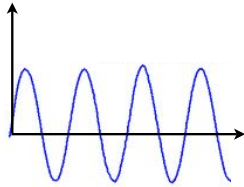
- Risultato:

- output scalato (ampiezza diversa) e traslato in fase
- stessa frequenza

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Intuitivamente:

input



$$f(t) = A \cos \omega t$$

$$f(t) = A \sin \omega t$$



$$g = \mathcal{S}(f)$$

output

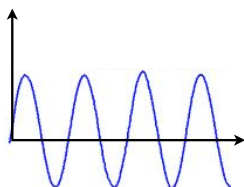
- Risultato:

- output scalato (ampiezza diversa) e traslato in fase
- stessa frequenza

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Intuitivamente:

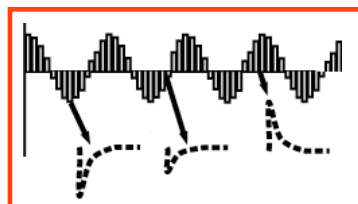
input



$$f(t) = A \cos \omega t$$

$$f(t) = A \sin \omega t$$

ogni impulso crea una
risposta impulsiva
scalata e traslata



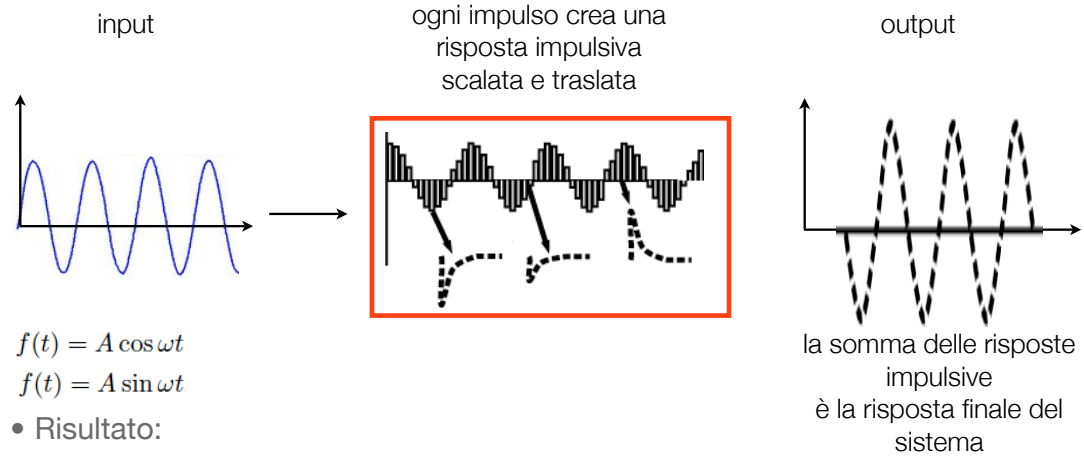
output

- Risultato:

- output scalato (ampiezza diversa) e traslato in fase
- stessa frequenza

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Intuitivamente:

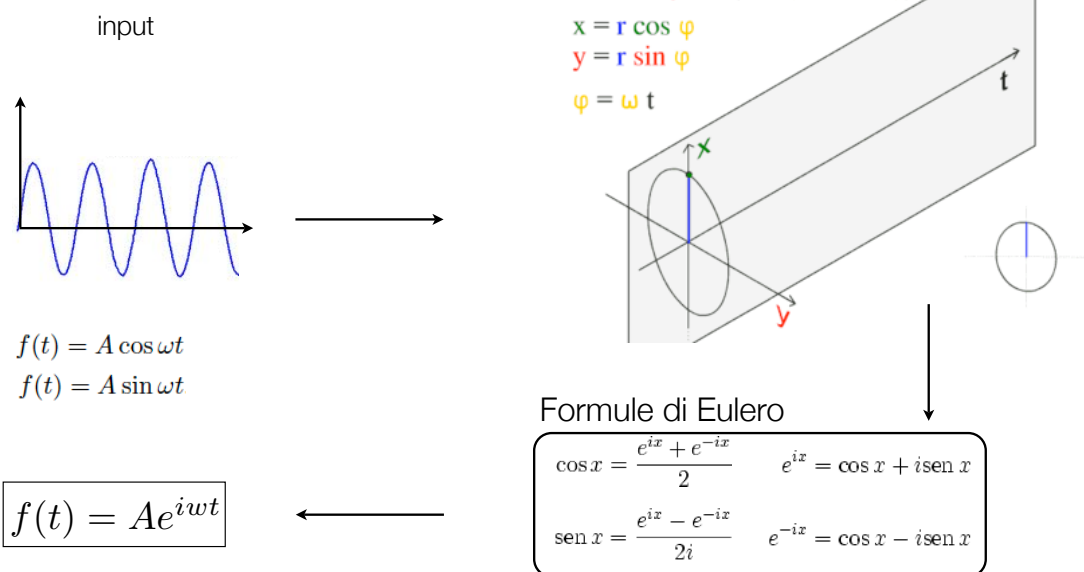


- Risultato:

- output scalato (ampiezza diversa) e traslato in fase
- stessa frequenza

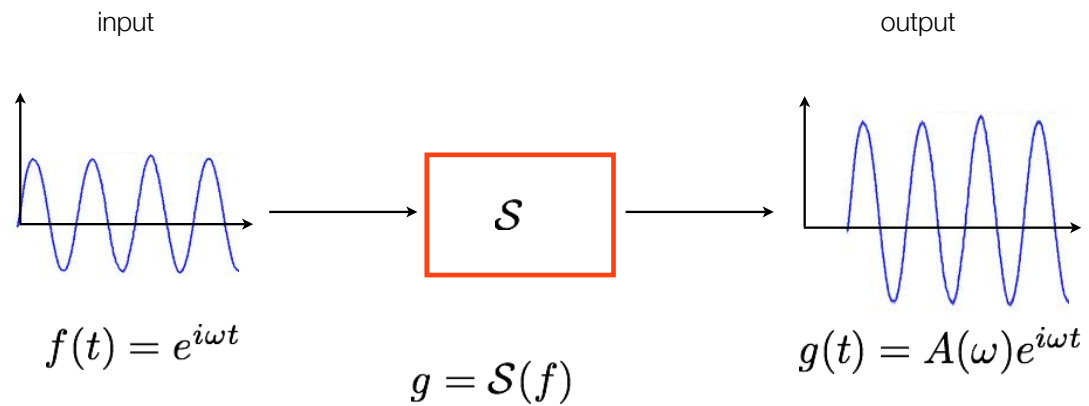
Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Generalizziamo la rappresentazione del segnale



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Consideriamo il caso unidimensionale



- Risultato:

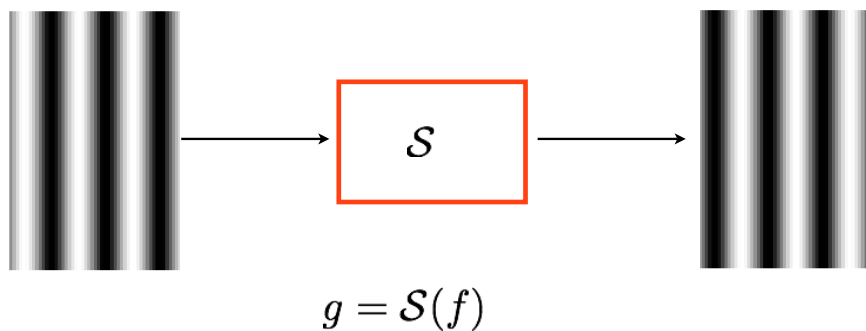
- output scalato (ampiezza diversa) e traslato in fase
- stessa frequenza

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Generalizzando a 2D

$$f(x, y) = e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} = e^{i(u x + v y)}$$

$$g(x, y) = A(\omega_x, \omega_y) e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} \\ = A(u, v) e^{i(u x + v y)}$$



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

$$g = \mathcal{S}(f)$$

$$\begin{aligned} g &= f \otimes h = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-x', y-y') h(x', y') dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(u(x-x') + v(y-y'))} h(x', y') dx' dy' \\ &= e^{i(ux+vy)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ux'+vy')} h(x', y') dx' dy' \\ &= e^{i(ux+vy)} H(u, v) = H(u, v) f \end{aligned}$$

$$H(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ux'+vy')} h(x', y') dx' dy' \quad \begin{array}{l} \text{MTF} \\ \text{funzione di} \\ \text{trasferimento} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Trasformata di Fourier} \\ \text{della PSF} \end{array}$$

$$H(u, v) e^{i(ux+vy)} = A(u, v) e^{i(ux+vy)}$$

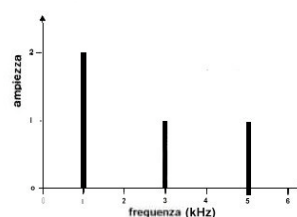
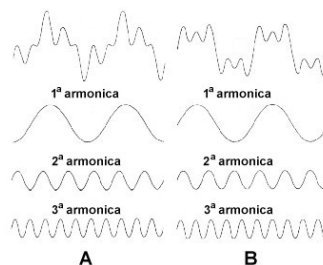
Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali

- Ma che cos'è la trasformata di Fourier?
- E' la generalizzazione a segnali non periodici del fatto che i segnali periodici sono ottenibili come sovrapposizione lineare di componenti armoniche

armonica di frequenza 0
(componente costante)

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)]$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

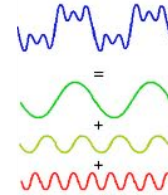


Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

$$F(u, v) = \mathcal{F}\{f(x, y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ux+vy)} f(x, y) dx dy$$

Trasformata di Fourier:
data $f(x, y)$ calcola i coefficienti (spettro)
che pesano le varie componenti sinusoidali
che sommate ricostruiscono l'immagine $f(x, y)$

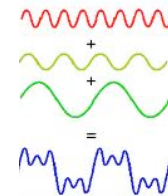
ANALISI



$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{+i(ux+vy)} du dv$$

Trasformata inversa di Fourier:
ricostruisce l'immagine $f(x, y)$ sommando le varie
componenti sinusoidali
pesate dai coefficienti $H(u, v)$

SINTESI

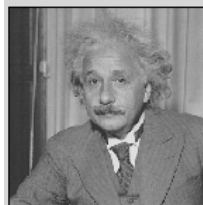


Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

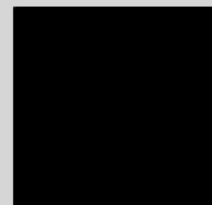
```
f = imread('einstein.jpg'); %leggo l'immagine
subplot(2, 2, 1); imshow(f), title('Immagine originale f(x,y)')

F = fft2(double(f)); %trasformata
%visualizzo il valore assoluto
subplot(2, 2, 2); imshow(abs(F), []), title('Trasformata di Fourier F(u,v)')
%visualizzo centrando la componente costante e in scala logaritmica
subplot(2, 2, 3)
imshow(fftshift(log(abs(F))), [])
title('Log del modulo di F(u,v)')
%antitrasformo da Fourier al dominio spaziale
subplot(2, 2, 4)
g = ifft2(F); %trasformata inversa
imshow(g, []);
title('Immagine anti trasformata f(x,y)')
```

Immagine originale $f(x, y)$



Trasformata di Fourier $F(u, v)$



Log del modulo di $F(u, v)$

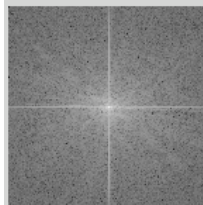
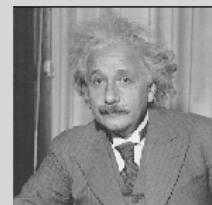
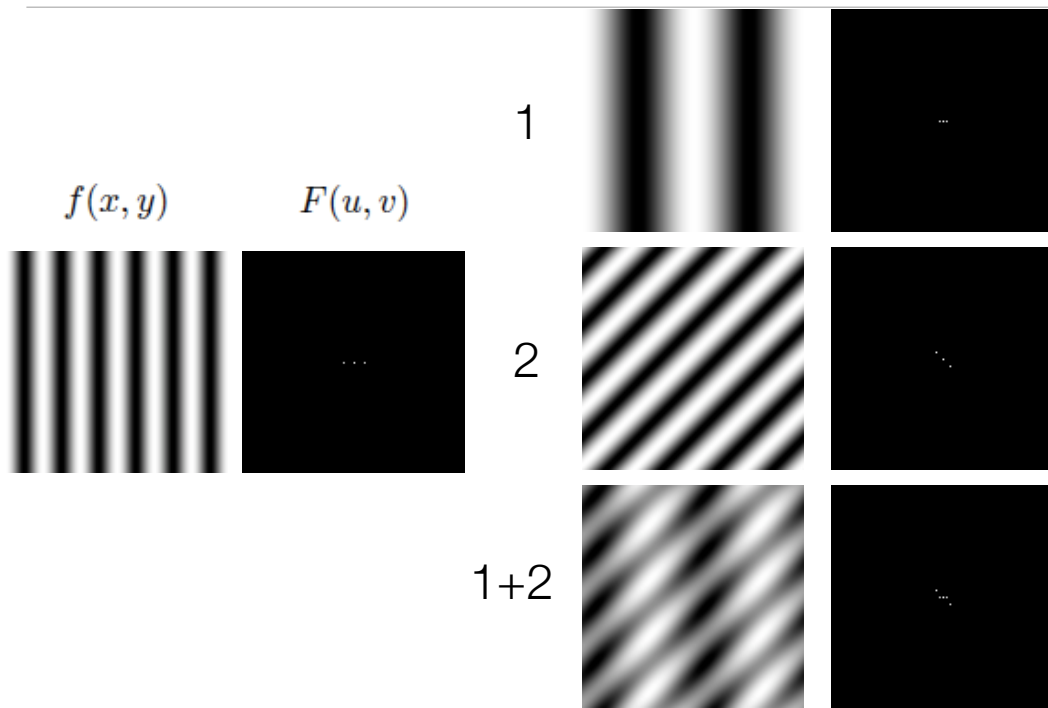


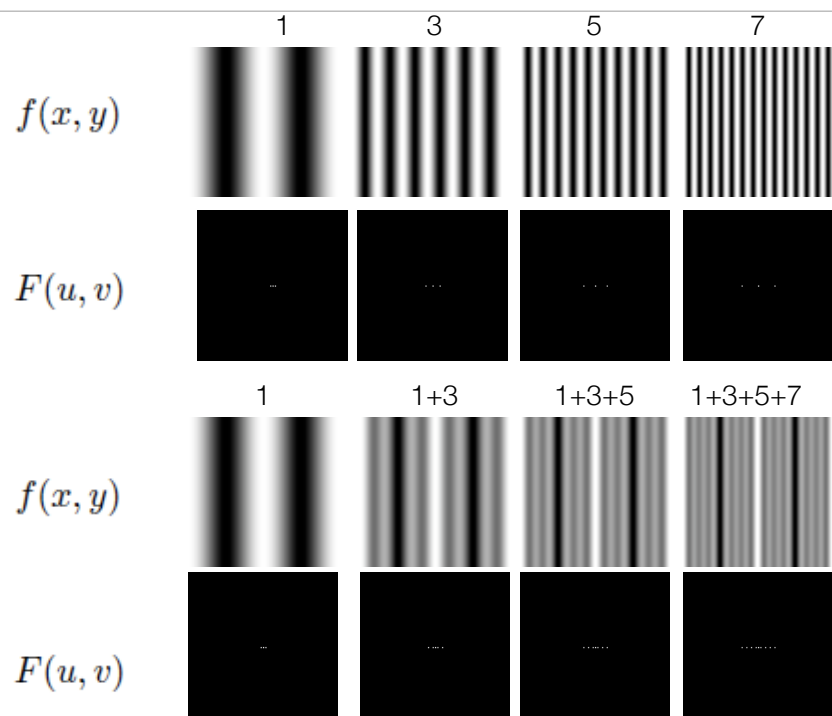
Immagine anti trasformata $f(x, y)$



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

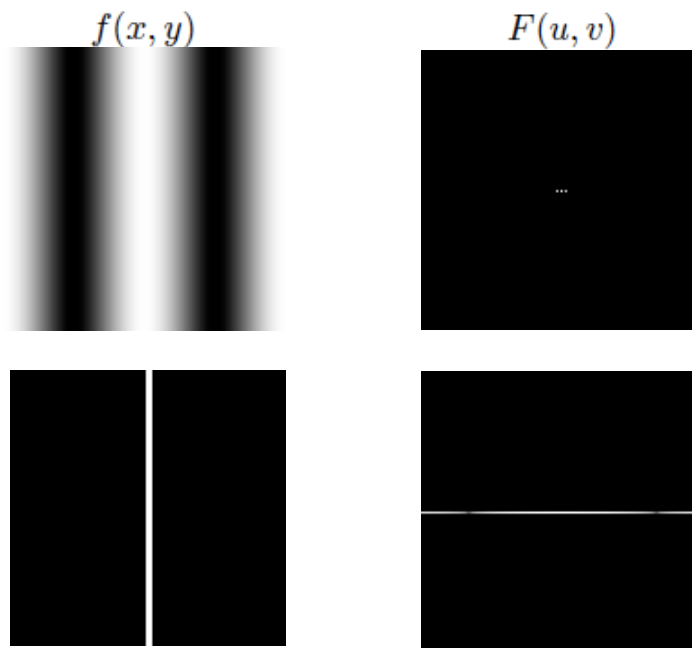


Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

Principio
di
Indeterminazione



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

- Posso visualizzare le componenti (armoniche 2D) sfruttando la proprietà

$$e^{iax} \longleftrightarrow \sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega - a)$$

```
% visualizzazione delle componenti di Fourier
% sfrutta il fatto che F(exp(iax))= sqrt(2*pi)delta(u-a)
figure(1);
s = 128; % dimensione della matrice della componente 2D da visualizzare
n = 4; % numero di componenti (righe e colonne) nella figura
for M = 0:n-1 % no. di cicli su asse y
    for N = 0:n-1 % no. di cicli su asse x
        F = zeros(s); % F matrice di zeri per la componente armonica ...

        % ... tutti zero meno 1 che rappresenta la delta di dirac ...
        F(M + 1, N + 1) = 1; %
        % ... elementi simmetrici per le frequenze negative
        F(mod(-M, s) + 1, N + 1) = 1;
        F(M + 1, mod(-N, s) + 1) = 1;
        F(mod(-M, s) + 1, mod(-N, s) + 1) = 1;

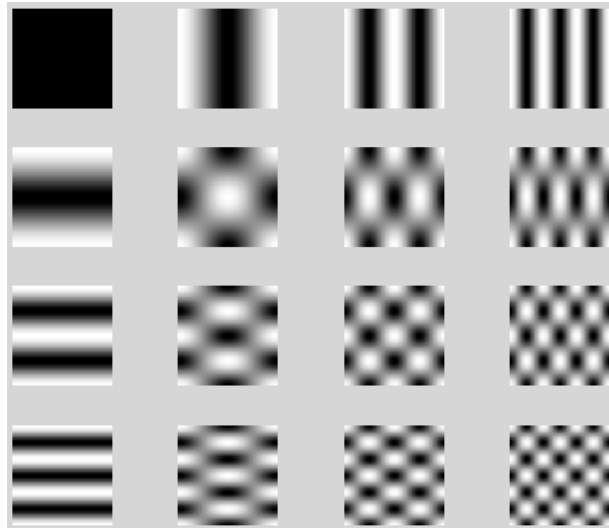
        % Antitrasformata
        fcomp = ifft2(F); % fcomp e' la componente di Fourier nel dominio spaziale

        subplot(n, n, n*M + N + 1);
        imshow(fcomp, []);
    end
end
```

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

- Posso visualizzare le componenti (armoniche 2D) sfruttando la proprietà

$$e^{iax} \longleftrightarrow \sqrt{2\pi} \cdot \delta(\omega - a)$$



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

- Ricostruisco l'immagine per componenti

```

***** SINTESI PER COMPONENTI
figure(3)
f = imread('einstein.jpg'); %leggo l'immagine
%sottocampiono l'immagine per renderla più piccola
im = f(1:2:size(f,1), 1:2:size(f,2));
Fim = fft2(double(im));

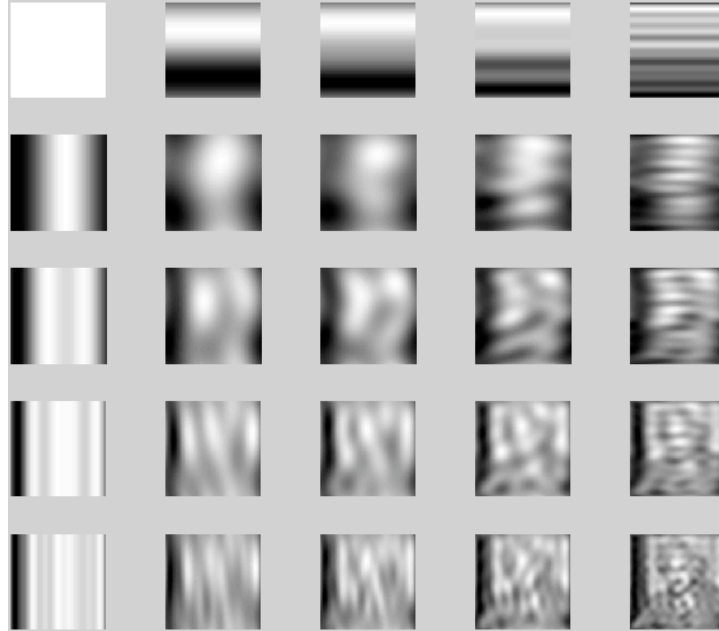
%ricaviamo i valori di frequenza spaziale per gli indici della matrice che contiene
%la Trasformata
nx = size(Fim, 2); %dimensione matrice della trasformata F(u,v)
ny = size(Fim, 1);
cxrange = [0:nx/2, -nx/2+1:-1]; % cicli lungo l'asse x
cyrange = [0:ny/2, -ny/2+1:-1]; % cicli lungo l'asse y
[cx, cy] = meshgrid(cxrange, cyrange); % genero la mesh

%ricostruzione dell'immagine originale per componenti
cicli = [0 1 2 4 8]; %cicli presi in considerazione
n = length(cicli);
for p = 1:n
    for q = 1:n
        %estraggo le singole componenti aventi aventi frequenza spaziale
        %verticale e orizzontale minore di.....
        supporto_comp = abs(cx) <= cicli(p) & abs(cy) <= cicli(q); %matrice logica 0/1
        %assegno ampiezza e fase alla componente
        componenteF = Fim .* supporto_comp; %solo i punti della componente estratta hanno un valore diverso da 0
        partim = ifft2(componenteF); %anti-trasformo
        subplot(n, n, n*(p-1) + q); %visualizzo la componente nel dominio spaziale
        imshow(partim, []);
    end
end
end

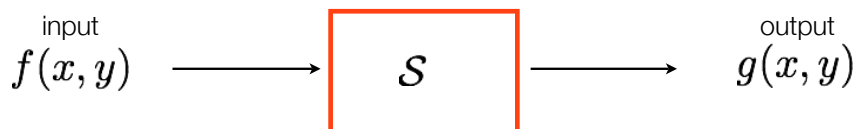
```

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali e Trasformata di Fourier

- Ricostruisco l'immagine per componenti



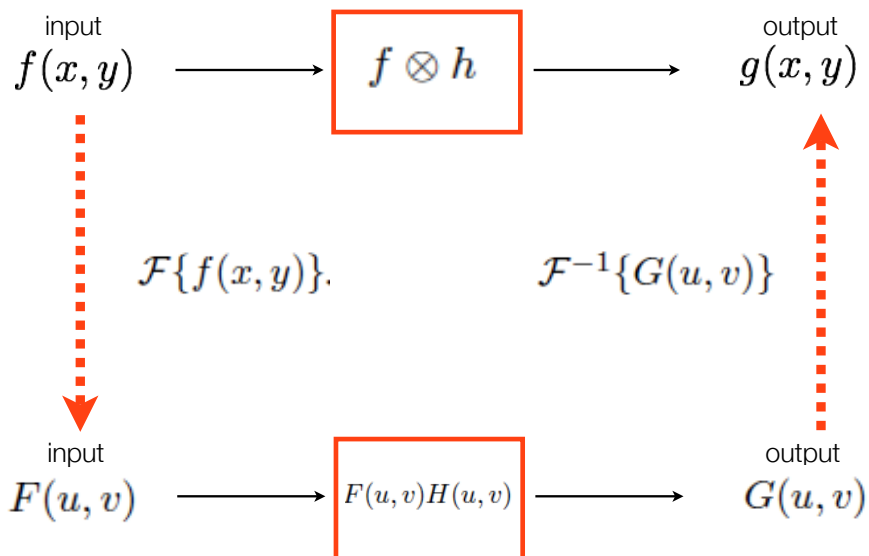
Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali: Trasformate e sistemi



$$g = \mathcal{S}(f) = f \otimes h = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x', y - y') h(x', y') dx' dy'$$

$$\begin{aligned} G(u, v) = \mathcal{F}\{g(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ux+vy)} g(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ux+vy)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x', y - y') h(x', y') dx' dy' \right] dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x', y - y') e^{-i(ux+vy)} dx dy \right] h(x', y') dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta) e^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta \right] e^{-i(ux'+vy')} h(x', y') dx' dy' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) e^{-i(ux'+vy')} h(x', y') dx' dy' \\ &= F(u, v) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(ux'+vy')} h(x', y') dx' dy' \\ &= F(u, v) H(u, v) \end{aligned}$$

Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali: Trasformate e sistemi



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali: Trasformate e sistemi

```
f = imread('einstein.jpg'); %leggo l'immagine originale
%sottocampiono l'immagine per renderla più piccola
f = f(1:2:size(f,1), 1:2:size(f,2));
subplot(2,3,1), imshow(f,[]), title('Immagine di input f(x,y)')

PQ=padding(size(f)) %calcola la dimensione di padding
F = fft2(double(f),PQ(1),PQ(2)); %trasformata di Fourier con padding
subplot(2,3,2), imshow(fftshift(log(abs(F))),[]), title('Log del modulo di F(u,v)')

h = fspecial('gaussian', [15,15], 1.0); %genera un filtro gaussiano
subplot(2,3,3), surf(h), title('PSF gaussiana')

H = fft2(double(h), PQ(1), PQ(2) ); %trasforma il filtro usando le dimensioni di padding
subplot(2,3,4), imshow(fftshift(log(abs(H))),[]), title('Log del modulo di H(u,v)')

G=H.*F; %moltiplicazione nello spazio delle frequenze
subplot(2,3,5), imshow(fftshift(log(abs(G))),[]), title('Log del modulo di G(u,v)')

g = ifft2(G); %antitrasformo
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2)); %elimina il padding
subplot(2,3,6), imshow(g,[]), title('Immagine di output g(x,y)')
```



Interludio: risposta di un sistema lineare a reticoli sinusoidali: Trasformate e sistemi

