

Computazione per l'interazione naturale: Richiami di algebra lineare



Corso di Interazione uomo-macchina II

Prof. Giuseppe Boccignone

Dipartimento di Informatica
Università di Milano

boccignone@di.unimi.it
http://boccignone.di.unimi.it/IUM2_2014.html

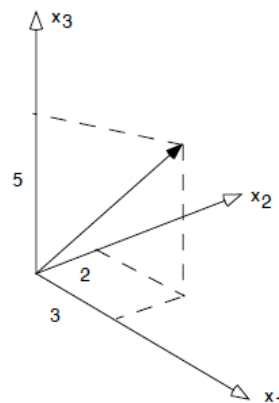
Un po' di algebra lineare di base //vettori

- Un vettore colonna D-dimensionale

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_D \end{bmatrix}$$

- In 3 dimensioni

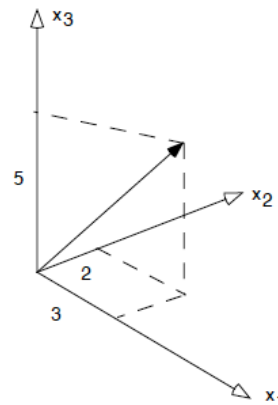
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Un po' di algebra lineare di base //vettori

- In 3 dimensioni

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$



- In Matlab:

```
>> x = [3; 2; 5]
x =
     3
     2
     5
```



Un po' di algebra lineare di base // trasposizione di vettori

- Un vettore riga D-dimensionale definito come la trasposta del vettore colonna

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_D \end{bmatrix}$$

- In Matlab

```
>> x'
ans =
     3     2     5
```



Un po' di algebra lineare di base

// prodotto scalare

- Il prodotto interno (prodotto scalare, dot product) di due vettori

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_D \end{bmatrix}$$
$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_D b_D = \sum_{i=1}^D a_i b_i$$

- In Matlab

```
>> a = [2;2;2];  
>> b = [3;3;3];  
>> a' * b  
ans =  
    18  
>> dot(a,b)  
ans =  
    18
```



Un po' di algebra lineare di base

// norma di un vettore

- Norma euclidea del vettore (lunghezza)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

- Il vettore ha norma unitaria se

$$\|\mathbf{x}\| = 1$$

- Angolo fra due vettori

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|}$$

- I vettori sono ortogonali se

$$\cos(\theta) = 0, \text{ i.e. } \mathbf{a}^T \mathbf{b} = 0$$

```
>> a  
a =  
    2  
    2  
    2  
  
>> sqrt(a' * a)  
ans =  
    3.4641  
  
>> norm(a)  
ans =  
    3.4641
```



Un po' di algebra lineare di base

// norma di un vettore

```
>> a=[1;2;3];  
>> b=[10; 10; 10];  
>> cos_theta= dot(a,b) / (norm(a)*norm(b))  
  
cos_theta =  
  
    0.9258  
  
>> theta = acos(cos_theta) * 180 /pi  
  
theta =  
  
    22.2077
```



Un po' di algebra lineare di base

// basi vettoriali

- Un insieme di N vettori D-dimensionali

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$$

- Tali vettori sono linearmente indipendenti se nessuno dei vettori nell' insieme puo' essere scritto come combinazione lineare degli altri vettori
- Un insieme di N vettori l.i. genera uno spazio vettoriale N-dimensionale
- Ogni vettore in tale spazio puo' essere rappresentato come combinazione lineare di vettori di base l.i. e unitari. Esempio per uno SV a 3 dimensioni:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un po' di algebra lineare di base // matrici

- Matrice A di m righe e n colonne, a elementi reali $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- a_{ij} indica l'elemento di riga i e colonna j
- a_j indica la j -esima colonna
- a_i^T indica la i -esima riga

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{bmatrix}$$

Un po' di algebra lineare di base // matrici

```
>> A=rand(4,3)
A =
    0.2769    0.6948    0.4387
    0.0462    0.3171    0.3816
    0.0971    0.9502    0.7655
    0.8235    0.0344    0.7952

>> i = 2; j = 3;

>> a_j = A(:, j)
a_j =
    0.4387
    0.3816
    0.7655
    0.7952

>> a_i = A(i, :)
a_i =
    0.0462    0.3171    0.3816
```



Un po' di algebra lineare di base

//prodotto esterno

- Il prodotto esterno di due vettori N-dimensionale e M-dimensionale

$$\mathbf{ab}^T = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_M \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_M \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_Nb_1 & a_Nb_2 & \cdots & a_nb_M \end{bmatrix}$$

- In Matlab:

```
>> a * b'

ans =

     6     6     6
     6     6     6
     6     6     6
```



Un po' di algebra lineare di base

//somma di matrici

- Date due matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la somma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ è una matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tale che

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

```
>> A = ones(2,3)

A =
     1     1     1
     1     1     1

>> B = 2 * ones(2,3)

B =
     2     2     2
     2     2     2

>> C = A + B

C =
     3     3     3
     3     3     3
```



Un po' di algebra lineare di base

//prodotto di matrici

- Date due matrici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ il loro prodotto è la matrice $C \in \mathbb{R}^{m \times p}$ di elementi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- = matrice dei prodotti interni delle righe di A e delle colonne di B

$$C = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T b_1 & a_1^T b_2 & \cdots & a_1^T b_p \\ a_2^T b_1 & a_2^T b_2 & \cdots & a_2^T b_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^T b_1 & a_m^T b_2 & \cdots & a_m^T b_p \end{bmatrix}$$

Un po' di algebra lineare di base

//prodotto di matrici

```
>> A = rand(3,2)

A =

    0.8147    0.9134
    0.9058    0.6324
    0.1270    0.0975

>> B = rand(2,3)

B =

    0.2785    0.9575    0.1576
    0.5469    0.9649    0.9706

>> A*B

ans =

    0.7264    1.6614    1.0149
    0.5981    1.4775    0.7565
    0.0887    0.2157    0.1147
```



Un po' di algebra lineare di base

//prodotto di matrici

- Date due matrici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ il loro prodotto è la matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ di elementi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- = somma dei prodotti esterni delle colonne di A e delle righe di B

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} - & b_1^T & - \\ - & b_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & b_n^T & - \end{array} \right] = \sum_{i=1}^n a_i b_i^T$$

Un po' di algebra lineare di base

//prodotto di matrici

- Date due matrici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ il loro prodotto è la matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ di elementi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- = prodotti tra la matrice A e le colonne di B

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ | & | & & | \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} - & \mathbf{A}b_1 & - \\ - & \mathbf{A}b_2 & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{A}b_p & - \end{array} \right]$$

Un po' di algebra lineare di base

//prodotto di matrici

- Date due matrici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ il loro prodotto è la matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ di elementi

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

- = prodotti tra le righe di A e la matrice B

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} - & a_1^T \mathbf{B} & - \\ - & a_2^T \mathbf{B} & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T \mathbf{B} & - \end{bmatrix}$$

Un po' di algebra lineare di base

//matrici trasposte

- La trasposta $\mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ si ottiene scambiando righe e colonne

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

```
>> A
A =
    0.2769    0.6948    0.4387
    0.0462    0.3171    0.3816
    0.0971    0.9502    0.7655
    0.8235    0.0344    0.7952

>> A'
ans =
    0.2769    0.0462    0.0971    0.8235
    0.6948    0.3171    0.9502    0.0344
    0.4387    0.3816    0.7655    0.7952
```



Un po' di algebra lineare di base //matrici trasposte

- Se $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ la matrice è simmetrica
- Valgono le proprietà seguenti

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

Un po' di algebra lineare di base // derivazione vettoriale

- Derivata vettoriale di una funzione scalare $f(\mathbf{x})$ di un vettore D-dimensionale

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_D} \end{bmatrix}$$

- Esempio: se $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T \mathbf{x}$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_D \end{bmatrix} = \mathbf{a}$$

Un po' di algebra lineare di base

// derivazione vettoriale

- La derivata vettoriale di una funzione vettoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ di un vettore D -dimensionale è definita mediante la matrice Jacobiana

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N(\mathbf{x})}{\partial x_D} \end{bmatrix}$$

Un po' di algebra lineare di base

// derivazione vettoriale

- Sia data la funzione scalare $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{x})^2$

- La derivata (parziale) prima
$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} a_1 \\ 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} a_2 \\ \vdots \\ 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} a_D \end{bmatrix}$$

- La derivata seconda
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \right) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} a_1 \\ 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} a_2 \\ \vdots \\ 2\mathbf{a}^T \mathbf{x} a_D \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & \cdots & a_D a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & \cdots & a_D a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 a_D & a_2 a_D & \cdots & a_D^2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{a}\mathbf{a}^T \end{aligned}$$

Un po' di algebra lineare di base // determinanti

- Il determinante di una matrice M quadrata di dimensione $N \times N$ è una funzione scalare denotata come $\det(M)$ o $|M|$

- Esempio: matrice 2×2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc.$$

- Esempio: matrice 3×3 (mediante regola di Sarrus)

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb.$$

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} & \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \\ d & e & f & d & e & f \\ g & h & i & g & h & i \end{array}$$

$$aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Un po' di algebra lineare di base // determinanti

- In Matlab è più semplice:

```
>> a * b'
```



```
ans =
```

```
6    6    6
6    6    6
6    6    6
```

```
>> det(a * b')
```

```
ans =
```

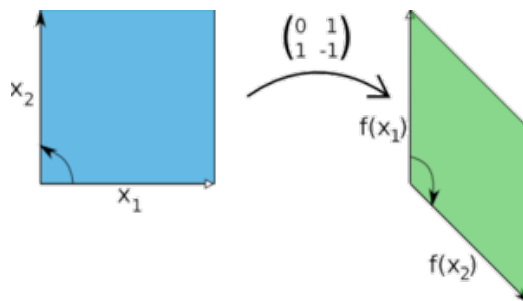
```
0
```

Un po' di algebra lineare di base // determinanti

- Se le colonne di M non sono l.i. allora

$$\det(M) = 0$$

- In questo caso il rango della matrice M è minore della dimensione N , e la matrice non è univocamente invertibile
- Il determinante è una misura della deformazione del volume, quando M è usata come una trasformazione lineare: se $\det(M)$ è grande, ho molto stretching; se in valore assoluto è uguale a 1 si preserva l'area:



Un po' di algebra lineare di base // determinanti e inversa

- La traccia della matrice M è la somma degli elementi della diagonale

$$\text{trace}(M) = \sum_{n=1}^N M_{nn}$$

- Il determinante si può calcolare come prodotto degli autovalori di M

$$\det(M) = \prod_{n=1}^N \lambda_n$$

- Se il determinante di una matrice quadrata M è diversa da zero possiamo calcolarne l'inversa M^{-1}

$$MM^{-1} = I$$

- I è la matrice identità

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{bmatrix}$$

Un po' di algebra lineare di base

// determinanti e inversa

- In Matlab:

$$\text{trace}(\mathbf{M}) = \sum_{n=1}^N M_{nn}$$

$$\det(\mathbf{M})$$

$$\mathbf{M}^{-1}$$

```
>> M = a * b'
M =
     6     6     6
     6     6     6
     6     6     6

>> t=trace(M)
t =
    18

>> det(M)
ans =
     0

>> inv(M)
Warning: Matrix is singular to working
precision.

ans =

    Inf    Inf    Inf
    Inf    Inf    Inf
    Inf    Inf    Inf
```



Un po' di algebra lineare di base

// determinanti e inversa

$$\det(\mathbf{M})$$

$$\mathbf{M}^{-1}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{I}$$

```
M = [5 12 6;
      20 2 8;
      3 87 12];
```



```
>> det(M)
ans =
    4452

>> invM = inv(M)
invM =
   -0.1509    0.0849    0.0189
   -0.0485    0.0094    0.0180
    0.3895   -0.0896   -0.0517
```

```
>> M * invM
ans =
    1.0000     0     0
    0.0000    1.0000     0
     0     0.0000    1.0000
```

```
>> eye(size(M))
ans =
     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1
```

Un po' di algebra lineare di base // pseudo-inversa (Moore-Penrose)

- Se la matrice M non è quadrata possiamo calcolarne la pseudo-inversa

$$M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$$

- In questo caso vale la

$$M^\dagger M = I$$

Un po' di algebra lineare di base // pseudo-inversa (Moore-Penrose)

$$M^\dagger = (M^T M)^{-1} M^T$$

$$M^\dagger$$

$$M^\dagger M = I$$

```
>> M = magic(4)
M =
    16     2     3    13
     5    11    10     8
     9     7     6    12
     4    14    15     1
>> M=M(:,1:3)
M =
    16     2     3
     5    11    10
     9     7     6
     4    14    15
>> pseudoM= inv(M' * M) * M'
pseudoM =
    0.0522    0.0022    0.0272   -0.0228
   -0.1831    0.2669    0.2919   -0.2581
    0.1603   -0.2397   -0.2897    0.3103
>> pinv(M)
ans =
    0.0522    0.0022    0.0272   -0.0228
   -0.1831    0.2669    0.2919   -0.2581
    0.1603   -0.2397   -0.2897    0.3103
>> pinv(M)*M
ans =
    1.0000    0.0000    0.0000
    0.0000    1.0000     0
   -0.0000     0    1.0000
```



Un po' di algebra lineare di base //autovettori e autovalori

- Una classe importante di equazioni lineari può essere scritta come

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- La matrice $\mathbf{M}$ trasforma il vettore $\mathbf{x}$ scalandolo di un valore λ
- Soluzione dell'equazione:

$$(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Se $\mathbf{M}$ è reale e simmetrica, abbiamo come soluzione N (auto)vettori

$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N\}$$

- I coefficienti $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ sono gli autovalori
- Gli autovettori sono una base dello SV N -dimensionale

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad \lambda_i \neq \lambda_j$$

Un po' di algebra lineare di base //autovettori e autovalori

- Esempio:
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

- Applico $(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$
$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Le colonne della matrice sono l.d. dunque il determinante $\det(\mathbf{M}) = 0$

$$(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = 0$$

- Ottengo le soluzioni per gli autovalori: $\lambda_1 = 4$ $\lambda_2 = 1$

- L'autovettore corrispondente a $\lambda_1 = 4$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ho infinite soluzioni: scelgo $v_1 = 1$, allora $v_2 = 1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Un po' di algebra lineare di base

//autovettori e autovalori

```
>> M = [3 1;  
        2 2]
```



```
M =
```

```
    3    1  
    2    2
```

```
>> [V lambda] = eig(M)
```

```
V =
```

```
    0.7071   -0.4472  
    0.7071    0.8944
```

```
lambda =
```

```
    4    0  
    0    1
```