Compito scritto dell'esame di Statistica e analisi dei dati (Crema) 27 luglio 2017	Prof. Giuseppe Boccignone	Corso di Laurea
Cognome:	Nome:	Matricola:

Istruzioni

- Il tempo riservato alla prova scritta e di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova e possibile consultare libri e appunti.
- Ogni foglio deve riportare il numero di matricola
- In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente
- Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede piu passaggi di calcolo, non sara preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o piu frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si svolgano i calcoli mantenendo tali numeri in forma frazionaria fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sara eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).
- SOLO PER STUDENTI DEL CORSO ONLINE (VECCHIO ORDINAMENTO, Prof. Gianini): Indicare quale Modulo viene svolto al fine di completare una prova d'esame parziale precedentemente sostenuta con esito positivo
  - Modulo 1 ☐
  - Moduli 2 e 3 ☐

Modulo 1

Esercizio 1.

Si supponga di avere un mazzo di 40 carte di cui 30 blu e 10 rosse. Si estrae una carta: se esce carta blu si lancia una moneta altrimenti un dado regolare.

(a) Con quale probabilitá esce testa?

Soluzione:

Definiamo i seguenti eventi

- $B =$ "esce carta blu"
- $T =$ "esce testa nel lancio della moneta"
- $D_i =$ "esce faccia i nel lancio del dado" , $i = 1, 2, \cdots, 6$
- $E =$ "esce testa nel gioco"

Osserviamo che

$$E = B \cap T$$

Allora:

$$P(E) = P(B \cap T) = P(T \mid B)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{40} = \frac{3}{8}$$

(b) Con quale probabilitá esce il numero 6?

Soluzione:

Definiamo l'evento $F =$ "esce numero 6 nel gioco"

In modo analogo al caso precedente, $F = D_6 \cap \sim B$, dunque:

$$P(F) = P(D_6 \mid \sim B)P(\sim B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{24}$$

Esercizio 2. In un canale di trasmissione binario asimmetrico (unidirezionale, $T \to R$) tutti gli errori sono sempre $1 \to 0$ o $0 \to 1$ ed entrambi possono accadere; esempi sono costituiti da fibre ottiche, dischi ottici, circuiti e memorie VLSI e ROM. Si supponga che un segnale binario T, emesso come 1 (ovvero $T = 1$) con probabilitá 0.75, sia inviato su un canale di trasmissione asimmetrico nel quale la probabilitá di errore nella trasmissione di 1 vale 0.08. In generale, il segnale trasmesso é ricevuto nella forma $R = 1$ con probabilitá 0.70. Calcolare:

(a) La probabilitá che il segnale 0 sia ricevuto come 1

Soluzione: Si tratta di calcolare $P(R = 1 \mid T = 0)$.
Sappiamo che $P(T = 1) = 0.75$, $P(R = 1) = 0.7$, $P(R = 0 \mid T = 1) = 0.08$ Da cui

$$P(T = 0) = 1 - P(T = 1) = 0.25.$$

$$P(R = 1 \mid T = 1) = 1 - P(R = 0 \mid T = 1) = 1 - 0.08 = 0.92$$

Per le probabilitá totali

$$0.7 = P(R = 1) = P(R = 1 \mid T = 1)P(T = 1) + P(R = 1 \mid T = 0)P(T = 0) = 0.92 \times 0.75 + P(R = 1 \mid T = 0) \times 0.25$$

Risolvendo:

$$P(R = 1 \mid T = 0) = 0.04$$

(b) La probabilitá totale di errore nella ricezione del segnale.

Soluzione:

$$P(\{errore\}) = P(\{R = 1, T = 0\} \cup \{R = 0, T = 1\}) = P(\{R = 1, T = 0\}) + P(\{R = 0, T = 1\}) =$$

$$= P(R = 1 \mid T = 0)P(T = 0) + P(R = 0 \mid T = 1)P(T = 1) = 0.07$$

Esercizio 3. Un gruppo di bagnanti é costituito per il 65% da persone di carnagione scura (S) e le altre sono di carnagione chiara (C). L'uso inappropriato di creme solari fa sí che si abbia una percentuale di persone ustionate dal sole (U) del 10% se di carnagione scura e del 60% se di carnagione chiara

(a) Sapendo che un bagnante a caso si é ustionato prendendo il sole, con che probabilitá ha carnagione chiara?

Soluzione: (Teorema di Bayes)
I dati del problema ci dicono che

$$P(S) = 0.65$$

$$P(C) = 1 - P(S) = 0.35$$

$$P(U \mid S) = 0.1$$

$$P(U \mid C) = 0.6$$

Vogliamo calcolare $P(C \mid U)$.
Usando Bayes:

$$P(C \mid U) = \frac{P(U \mid C)P(C)}{P(U \mid C)P(C) + P(U \mid S)P(S)} = 0.76. \tag{1}$$

Moduli 2 e 3

Esercizio 1. Una variabile aleatoria X, con valori nell'intervallo $1 \leq x \leq 2$, ha densitá

$$f_X(x) = \frac{k}{x^2}$$

.

(a) Calcolare valore atteso $E[X]$ e deviazione standard σ_X

Soluzione: Si calcola la costante k utilizzando la proprietá di normalizzazione:

$$1 = \int_1^2 f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{k}{x^2}dx = k\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = k(-\frac{1}{2}+1) = \frac{k}{2},$$

da cui $k = 2$

$$E[X] = \int_1^2 x\frac{2}{x^2}dx = 2\log 2 \approx 1.386$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = E\left[X^2\right] - 4\log^2 2 = 2\int_1^2 dx - 4\log^2 2 = 2(1-2\log^2 2) \approx 0.078$$

$$\sigma_X = \sqrt{0.078} \approx 0.28.$$

Esercizio 2.

Si effettuano 600 lanci di un dado non truccato.

(a) Calcolare un valore approssimato della probabilitá che il "5" esca un numero di volte compreso tra 94 e 106

Soluzione: (Distribuzione binomiale in approssimazione normale) In ogni lancio la probabilitá che esca il 5 vale $p = 1/6$ (equiprobabilitá di 6 eventi). Poiché $n = 600$ é sufficientemente grande, approssimiamo con una Gaussiana $\mathcal{N}(x \mid \mu = np, \sigma^2 = npq)$ dove

$$\mu = np = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 9.1287$$

Procediamo alla standardizzazione

$$z_1 = \frac{94-100}{9.1287} = -0.657$$

$$z_2 = \frac{106-100}{9.1287} = 0.657$$

Quindi usando le tabelle della normale ridotta

$$P(94 \leq X \leq 100) = F_Z(0.657) - F_Z(-0.657) = 2F_Z(0.657) - 1 \approx 0.49$$

Esercizio 3. Il responsabile dell'illuminazione di un palazzo ha a disposizione 3 lampadine di riserva. Ciascuna delle lampadine utilizzate dura in media 200 ore e il responsabile deve aspettare 24 ore perché gli vengano consegnate nuove lampadine di riserva.

(a) Qual é la probabilitá che il responsabile non sia in grado di sostituire le lampadine fulminate?

Soluzione: Il problema sorge se si fulminano piú di tre lampadine entro le 24 ore: in tal caso il responsabile non sará in grado di sostituirle. Dobbiamo dunque determinare la probabilitá congiunta

$$P(\{X_1 \leq 0.24\}, \{X_2 \leq 0.24\}, \{X_3 \leq 0.24\}).$$

dove X_1,X_2,X_3 sono i tempi di attesa della rottura della prima, seconda e terza lampadina.
Si assuma una distribuzione esponenziale negativa dei tempi di attesa e si ragioni, per semplicitá di calcolo in termini di centinaia di ore.
Il tempo medio é pari a $E[X] = 2$ (in centinaia di ore). Il parametro della distribuzione esponenziale é dunque

$$\lambda = \frac{1}{2} = 0.5$$

La probabilitá del tempo di rottura di una singola lampadina entro le 24 ore é

$$P(X \leq 0.24) = 1 - e^{-\lambda \cdot x} = 1 - e^{-0.5 \cdot 0.24} = 1 - 0.887 = 0.113$$

Poiché la rottura di ciascuna lampadina é indipendente dalle altre:

$$P(\{X_1 \leq 0.24\}, \{X_2 \leq 0.24\}, \{X_3 \leq 0.24\}) = P(\{X_1 \leq 0.24\}) \cdot P(\{X_2 \leq 0.24\}) \cdot P(\{X_3 \leq 0.24\}) = (0.113)^3 = 0.0014$$