Compito scritto dell'esame di Statistica e analisi dei dati (Crema) 22 gennaio 2018	Prof. Giuseppe Boccignone	Corso di Laurea
Cognome:	Nome:	Matricola:

Istruzioni

- Il tempo riservato alla prova scritta e di 2 ore e 30 minuti. Durante la prova e possibile consultare libri e appunti.
- Ogni foglio deve riportare il numero di matricola
- In ogni esercizio occorre indicare chiaramente, per ogni risposta, il numero della domanda corrispondente
- Riportare lo svolgimento degli esercizi per esteso (quando l'esercizio richiede piu passaggi di calcolo, non sara preso in considerazione se riporta solo le soluzioni). Se una serie di calcoli coinvolge una o piu frazioni semplici (numeratore e denominatore interi), per chiarezza, si svolgano i calcoli mantenendo tali numeri in forma frazionaria fin dove possibile (non li si converta nelle loro approssimazioni con virgola e decimali: solo il risultato finale sara eventualmente rappresentato in quest'ultima forma).
- SOLO PER STUDENTI DEL CORSO ONLINE (VECCHIO ORDINAMENTO, Prof. Gianini): Indicare quale Modulo viene svolto al fine di completare una prova d'esame parziale precedentemente sostenuta con esito positivo
  - Modulo 1 ☐
  - Moduli 2 e 3 ☐

Modulo 1

Esercizio 1. Abbiamo sul tavolo 9 carte coperte: due di esse sono di cuori, tre di fiori e quattro di picche.

(a) Calcolare la probabilitá che, scelte simultaneamente due carte a caso, siano di seme diverso.

Soluzione: Indichiamo con QQ l'evento "estrazione di due cuori", con FF l'evento "estrazione di due fiori" e con PP l'evento "estrazione di due picche"

Lo spazio campione S é costituito da $\binom{9}{2} = 36$ eventi possibili ovvero il numero di combinazioni di 9 elementi a 2 a 2.

Inoltre si hanno

- $\binom{2}{2} = 1$ evento QQ
- $\binom{3}{2} = 3$ eventi FF
- $\binom{4}{2} = 6$ eventi PP

La probabilitá di estrarre due carte dello stesso seme vale:

$$P(\text{stesso seme}) = P(\{QQ\} \cup \{FF\} \cup \{PP\}) = P(\{QQ\}) + P(\{FF\}) + P(\{PP\}) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{6}{36} = \frac{5}{18}$$

Pertanto:

$$P(\text{seme diverso}) = 1 - P(\text{stesso seme}) = \frac{13}{18}$$

Esercizio 2. Un costruttore viene fornito per gli stessi tipi di pezzi per l'80% dalla ditta A e per il restante 20% dalla ditta B. Tali pezzi vengono poi depositati assieme nello stesso magazzino. Per il passato é stato notato che i prodotti di A erano per il 5% difettosi, mentre quelli della ditta B lo erano nella misura del 9%

(a) Avendo scelto un pezzo a caso dal magazzino ed avendo riscontrato che é difettoso, qual é la probabilitá che sia stato fornito da B?

Soluzione: (Teorema di Bayes)

Indichiamo con D l'evento "pezzo difettoso", con A l'evento "fornito da A" e con B l'evento "fornito da B".

I dati del problema ci dicono che $P(D \mid A) = 0.05, P(D \mid B) = 0.09, P(A) = 0.80, P(B) = 0.20$

Usando Bayes:

$$P(B \mid D) = \frac{P(D \mid B)P(B)}{P(D \mid A)P(A) + P(D \mid B)P(B)} = \frac{0.018}{0.0518} = 0.3475. \quad (1)$$

Esercizio 3. Si lanciano due dadi non truccati.

(a) Qual é la probabilitá che sia uscito almeno un 6 sapendo che sono uscite due facce diverse?

Soluzione: (Prob. condiz.)

Definiamo gli eventi seguenti:

$$E = \text{“i dadi hanno valore diverso”};$$

$$F = \text{“uscito almeno un 6”}.$$

E' facile calcolare che

$$P(E) = \frac{5}{6}, P(E,F) = \frac{10}{36}.$$

La probabilitá richiesta é la condizionata:

$$P(F \mid E) = \frac{P(E,F)}{P(E)} = \frac{1}{3}$$

(b) Qual é la probabilitá che il primo dado abbia valore 6 sapendo che la somma dei numeri usciti é m, con $m \in \{2,...,12\}$?

Soluzione: (Teorema di Bayes)

Definiamo gli eventi seguenti:

$$A = \text{“il primo dado ha valore 6”};$$

$$B = \text{“la somma dei numeri usciti é m ”}, m \in \{2,...,12\}$$

Usando Bayes,

$$P(A \mid B_m) = \frac{P(B_m \mid A)P(A)}{P(B_m)}. \tag{2}$$

1. Se $m \leq 6$, allora $P(B_m \mid A) = 0 \implies P(A \mid B_m) = 0$
2. Se $m > 6$, allora $P(B_m \mid A) = \frac{1}{6}$ e $P(B_m) = \frac{12-m+1}{36}$.
   Poiché $P(A) = \frac{1}{6}$, $\implies P(A \mid B_m) = \frac{1}{12-m+1}$

Moduli 2 e 3

Esercizio 1. La durata Xdi vita (in mesi) di una batteria segue una distribuzione esponenziale $Exp(\lambda = 7)$

(a) Calcolare la probabilitá che la batteria abbia una durata di 3 mesi dato che é giá durata un mese.

Soluzione: Ricordiamo che per la distribuzione esponenziale vale la legge della mancanza della memoria:

$$P(X > 3 \mid X > 1) = P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = e^{-14}$$

(b) Qual é la probabilitá che, su 30 batterie, meno di 5 durino piú di $\frac{1}{3}$ di mese?

Soluzione:
Sia Y la v.a. che conta il numero di batterie che durano piú di $\frac{1}{3}$ di mese.
Questa é discreta e si distribuisce secondo legge binomiale $Y \sim Bin(n,p)$, con parametri:

- $n = 30$
- $p = P(X > \frac{1}{3}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{3}) = e^{-\frac{7}{3}}$

Pertanto:

$$P(Y \leq 5) = \sum_{i=0}^{4} \binom{30}{i} \cdot (e^{-\frac{7}{3}})^i \cdot (1 - e^{-\frac{7}{3}})^{30-i} = 0.8397$$

Esercizio 2. In un lungo manoscritto, si é scoperto che solo il 13.5% delle pagine contengono errori tipografici.

(a) Trovate la percentuale di pagine che hanno esattamente 1 errore.

Soluzione: Sia X la V.A. discreta che indica il numero di errori per pagina. Poiché la percentuale di errori é bassa, possiamo assumere che X segue una legge di Poisson, $X \sim Pois(\mu)$, ovvero

$$Pois(\mu) = P_X(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \tag{3}$$

Possiamo calcolare il parametro μ, usando il fatto che, per $k = 0$ (nessun errore)

$$P(X = 0) = 1 - P(X > 0) = 1 - 0.135 = 0.865 = e^{-\mu}$$

da cui $\mu = 0.145$. Dunque:

$$P_X(X = 1) = \frac{0.145^1}{1!} e^{-0.145} = 0.125 \tag{4}$$

cioé il 12.5% delle pagine ha esattamente un errore.

Esercizio 3.

Il voto dell'esame di Statistica e Analisi dei dati segue una distribuzione normale di media $\mu = 20$ ed é inoltre noto che il 70% degli studenti supera l?esame.

(a) Stabilire quale voto viene superato dal 10% degli studenti.

Soluzione:
Riportiamoci ad una normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ in modo da poter consultare le tavole numeriche. Sia $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$.
I dati del problema ci dicono che

$$P(X < 18) = P(Y < -\frac{2}{\sigma}) = 0.3$$

Dalla tabella leggiamo che $z_{0.3} = -z_{0.7} = 0.52 = -\frac{2}{\sigma}$, da cui $\sigma = 3.84615$.
Sia v il voto con cui viene superato dal 10% degli studenti. Quindi

$$P(X > v) = 1 - P(X \leq v) = 1 - P(Y \leq \frac{v - 20}{3.84615}) = 0.1$$

ovvero

$$P(Y \leq \frac{v - 20}{3.84615}) = 0.9$$

Dalla tabella $z_{0.9} = 1.28 = \frac{v-20}{3.84615}$, da cui $v = 24.92301$