

Note introduttive alla probabilità e alla statistica

1 marzo 2017

Presentiamo sinteticamente alcuni concetti introduttivi alla probabilità e statistica

1 Probabilità e statistica

PROBABILITÀ: Un *modello probabilistico* è una descrizione matematica di una situazione incerta. Nel ragionamento probabilistico, assumiamo un modello probabilistico (e.g., una particolare distribuzione di probabilità e relativi parametri) ed utilizziamo tecniche matematiche per quantificare le conseguenze del modello.

STATISTICA: In questo caso, si parte dai dati e si arriva al modello.

L'*inferenza statistica* è esattamente il processo che, partendo da dati concreti, estrae informazione relativa a variabili e parametri non noti di un modello probabilistico specificato. Nel caso più complesso, il modello stesso potrebbe non essere noto e deve essere inferito.

In tal senso, l'inferenza viene anche denotata come un processo di *probabilità inversa*.

Come ogni altro modello scientifico può essere utilizzato per scopi esplicativi o predittivi. Per esempio, se il modello ha una qualche attinenza a un (modello di) fenomeno fisico, biologico, ecc...posso generare dati (simulazione) e confrontarli con i dati reali

Il *machine learning* o apprendimento statistico, oggi via via più importante (si pensi all'analisi o al *mining* di *big data*), può essere considerato una prosecuzione dell'inferenza statistica

2 Definizioni di probabilità

- DEFINIZIONE CLASSICA:

$$P = \frac{\text{no. casi favorevoli}}{\text{no. casi possibili}}$$

- DEFINIZIONE FREQUENTISTICA:

$$P \approx f_N(A) = \frac{N(A)}{N}$$

per N grande ($N \rightarrow \infty$) dove $N(A)$ è il numero di volte (frequenza assoluta) in cui si osserva o misura il risultato A in un esperimento ripetuto N volte; $f_N(A)$ è la frequenza relativa.

- DEFINIZIONE BAYESIANA: la probabilità quantifica un grado di credenza (*degree of belief*), o confidenza, o credibilità. Per esempio, nell'interpretazione soggettiva di De Finetti, quantifica la (pre)disposizione di un agente (razionale) a scommettere sulla riuscita di un evento (ad esempio, la probabilità che l'Inter vinca

il campionato, un esito chiaramente irripetibile per un numero N grande di volte, quindi intrattabile in termini frequentistici)

- DEFINIZIONE FORMALE: una funzione

$$P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

che soddisfa certi assiomi.

Si noti che nell'ultimo caso a differenza dei primi tre, non si fornisce una definizione "semantica" del concetto di probabilità, ma meramente formale: P è una funzione che soddisfa un insieme di assiomi (postulati da Kolmogorov), che vedremo prossimamente.

E' opportuno osservare che in Probabilità, l'approccio formale può essere utilizzato indifferentemente sia in un quadro frequentistico sia Bayesiano. Una grossa differenza tra questi ultimi due approcci emerge invece quando si scende sul terreno della Statistica

3 Elementi di un modello probabilistico

Gli elementi costitutivi di un modello di probabilità sono i seguenti:

1. esperimento
2. esito
3. spazio campionario
4. evento
5. misura di probabilità

3.1 Esperimento $\mathcal{E}$

Un esperimento aleatorio può essere l'osservazione di un fenomeno aleatorio o un'azione con un esito non deterministico, per esempio il lancio dei dadi, il lancio della moneta, il conteggio degli studenti che entrano in aula prima delle 14:00. Il tratto comune di tali osservazioni è il contare.

Le caratteristiche principali di un esperimento sono:

1. essere ben definito, nel senso che riusciamo a controllare tutti gli eventi;
2. la possibilità di contare o enumerare gli esiti dell'esperimento;
3. poterlo ripetere un numero N grande di volte.¹

¹ L'ultima caratteristica è concettualmente legata alla definizione frequentistica della probabilità

3.2 Esito

Ogni esperimento produce un risultato o *esito* (*outcome*); in modo più specifico, un esito elementare.

3.3 Spazio dei campioni S (oppure Ω)

E' l'insieme di tutti gli esiti possibili di un esperimento $\mathcal{E}$.

Esempio 3.1 Nel lancio di un dado:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Esempio 3.2 Nel lancio di una moneta:

$$S = \{T, C\}$$

Esempio 3.3 Nel lancio di due monete:

$$S = \{TT, CC, TC, CT\}$$

Oltre alla rappresentazione per estensione (notazione insiemistica) posso utilizzare anche una notazione tabellare.

TT	TC
CT	CC

Sul concetto di "possibilità", si assume implicitamente una qualche forma di accordo: per esempio, nel lancio di una moneta, si esclude che la moneta possa rimanere "in piedi"

Tabella 1: Rappresentazione tabellare dello spazio S

Osservazione 3.4 Lo spazio dei campioni S è a volte definito spazio degli stati. Si pensi, ad esempio al lancio di una moneta. Una sequenza ripetuta di lanci, produce una sequenza di esiti, per esempio

$$T \rightarrow T \rightarrow T \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow T \dots$$

La sequenza rappresenta la successione di esiti reali. La moneta è un sistema che assume due stati; posso immaginarla astrattamente come un automa a stati finiti (due) probabilistico come illustrato in Figura 3.4

In generale, posso concettualizzare il processo come un esempio di sistema dinamico (discreto) la cui evoluzione temporale segue la legge

$$x_t = f(x_{t-1}).$$

Essa caratterizza la variazione temporale (la dinamica) della variabile di stato $x_t \in S$; in altri termini x_t si "muove" nello spazio degli stati S . Si noti che in questi termini la sequenza generata rappresenta un primo esempio di serie temporale aleatoria (discreta). Se ripeto la generazione di tale serie più volte

$$T \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow T \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow T \dots$$

$$C \rightarrow T \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow T \rightarrow C \dots$$

$\dots,$

la collezione o ensemble di tali serie rappresenta un primo semplice esempio di processo stocastico.

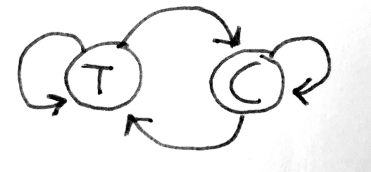


Figura 1: La moneta come automa probabilistico a stati finiti

3.4 Evento

Consideriamo l'esperimento del lancio di un dado: quello che ot-
tengo da uno spazio campionario può essere un esito elementare
(chiamato anche punto campione o sample point) oppure un evento,
ovvero un'aggregazione di esiti elementari. Un esempio è fornito in
figura 3.4

dove è rappresentato l'evento

$E = \text{"uscita di un numero pari"}$.

Pertanto:

Definizione 3.5 Un evento E è un sottoinsieme dello spazio dei campioni
 $S, E \subseteq S$.

3.5 Misura

La misura di un insieme A è una funzione che associa all'insieme un
numero reale positivo o nullo,

$$\sharp : A \rightarrow \mathbb{R}^+$$

Per un generico insieme discreto A coincide con la cardinalità di
 A , $\text{card}(A)$,

$$\sharp(A) = \text{card}(A)$$

- Nel caso $S = \{T, C\}$, la misura dello spazio campionario è $\sharp(S) = 2$
- Nel caso $S = \{TT, TC, CT, CC\}$, $\sharp(S) = 4$
- Nel caso dei due dadi, $\sharp(S) = 6 \times 6 = 36$

4 Misura di probabilità

Dato un evento E (esito semplice), in prima battuta possiamo definire
la misura di probabilità di E , o semplicemente la probabilità di E ,
come la proporzione²

$$P(E) = \frac{\sharp(E)}{\sharp(S)} \quad (1)$$

Esempio 4.1 Nel lancio di un dado, per $E = \text{"uscita di un numero pari"}$,

$$P(E) = \frac{\sharp(E)}{\sharp(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Si noti che in questo caso (si veda Figura 3.4), è come se ripartizionassi lo
spazio degli eventi:

$$S' = \{\text{pari}, \text{dispari}\} \text{ con } \sharp(S') = 2, P(E) = \frac{1}{2}.$$

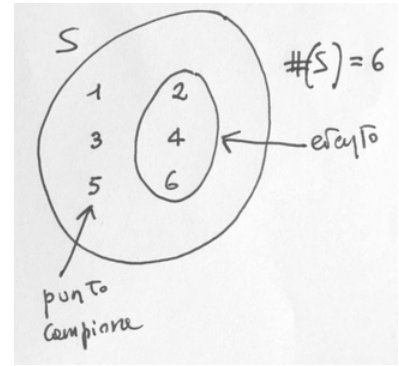


Figura 2: L'evento $E = \text{"uscita di un numero pari"}$ come insieme degli esiti elementari $\{2, 4, 6\}$

² La probabilità così definita viene anche detta *a priori*, perché non ho bisogno, per calcolarla, di effettuare l'esperimento (a differenza della procedura frequentistica), e coincide con la definizione classica di probabilità (proporzione tra i casi favorevoli e i casi possibili). Vedremo in seguito che è valida sotto l'assunzione di un modello *uniforme* di probabilità.

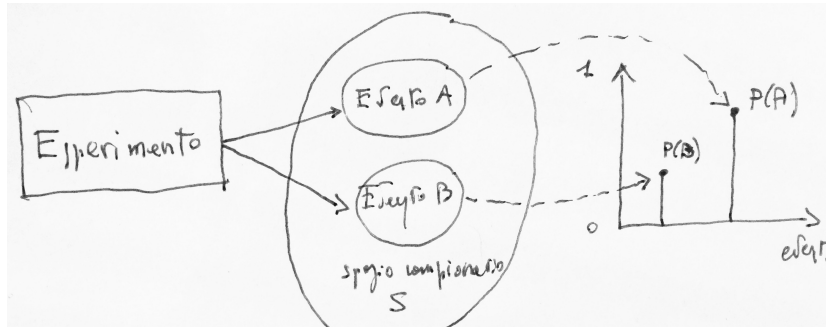


Figura 3: Gli elementi di un modello probabilistico

Osservazione 4.2 Dalla definizione (1) ponendo $E = \emptyset = \{\}$ (insieme vuoto):

$$P(E) = \frac{\#(\emptyset)}{\#(S)} = 0, \quad (2)$$

ovvero E è l'evento impossibile.

Se $E = S$,

$$P(E) = \frac{\#(S)}{\#(S)} = 1, \quad (3)$$

ovvero E è l'evento certo.

Dalla definizione (1) e dalle proprietà (2) e (3), si nota come la probabilità di un evento E soddisfi,

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

In sintesi, possiamo schematizzare gli “ingredienti” di un modello probabilistico come in figura 3