Definizione formale di probabilitá

10 marzo 2017

Si introducono la definizione assiomatica di probabilitá e alcune proprietá elementari che ne derivano

1 *Eventi e insiemi*

Poiché un evento é definito come un sottoinsieme dello spazio campionario, é possibile definire un'algebra degli eventi utilizzando le classiche operazioni su insiemi:

- unione: $A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\} = \{x | x \in A \texttt{ OR } x \in B\}$
- intersezione: $A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} = \{x | x \in A \texttt{ AND } x \in B\}$
- complemento: $\sim A = \{x | x \notin A\}$
- differenza: $A \backslash B = A \cap \sim B$

Esempio 1.1 (Evento complementare) *Considerando il lancio di un dado, definiamo l'evento*

$$E = \text{“}\texttt{numero pari}\text{”} = \{2, 4, 6\}$$

Allora,

$$\sim E = \sim \text{“}\texttt{numero pari}\text{”} = \text{“}\texttt{numero dispari}\text{”} = \{1, 3, 5\}$$

Inoltre

$$P(\sim A) = \frac{\sharp(\sim A)}{\sharp(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Esempio 1.2 (Evento unione) *Sempre, considerando il lancio di un dado, definiamo gli eventi*

$$A = \text{“}\texttt{numero pari}\text{”} = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \text{“}\texttt{numero primo}\text{”} = \{2, 3, 5\}$$

Allora,

$$A \cup B = \text{“}\texttt{numero pari oppure primo}\text{”} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Inoltre

$$P(A \cup B) = \frac{\sharp(A \cup B)}{\sharp(S)} = \frac{5}{6}$$

Esempio 1.3 (Evento intersezione) *Definiamo come nell'esempio precedente gli eventi*

$$A = \text{“}\texttt{numero pari}\text{”} = \{2,4,6\}$$

$$B = \text{“}\texttt{numero primo}\text{”} = \{2,3,5\}$$

Allora, l'intersezione dei due insiemi é un esito elementare:

$$A \cap B = \text{“}\texttt{numero pari e primo}\text{”} = \{2\}$$

Inoltre

$$P(A \cap B) = \frac{\sharp(A \cap B)}{\sharp(S)} = \frac{1}{6}$$

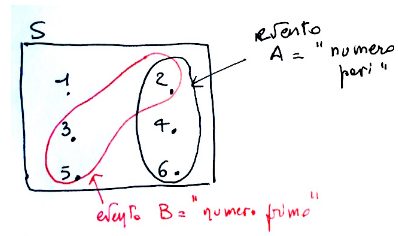

Figura 1: Eventi nello spazio degli stati definito dal lancio di un dado

Esempio 1.4 (Evento differenza) *Usando ancora*

$$A = \text{“}\texttt{numero pari}\text{”} = \{2,4,6\}$$

$$B = \text{“}\texttt{numero primo}\text{”} = \{2,3,5\}$$

Allora, la differenza tra A e B (cioé, A ma non B) ci restituisce l'evento:

$$A \backslash B = \text{“}\texttt{numeri pari che non sono primi}\text{”} =$$

$$= A \cap \sim B = \{2,4,6\} \cap \sim \{2,3,5\} = \{2,4,6\} \cap \{1,4,6\} = \{4,6\}$$

Inoltre

$$P(A \backslash B) = \frac{\sharp(A \backslash B)}{\sharp(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Il trattare eventi come insiemi puó essere applicato anche al caso in cui lo spazio degli stati é continuo, ovvero non numerabile.

Si consideri, ad esempio quello che viene identificato come l'*esperimento probabilistico fondamentale*:

"Scegliere un numero nell'intervallo $[0,1]$ con probabilitá uniforme"

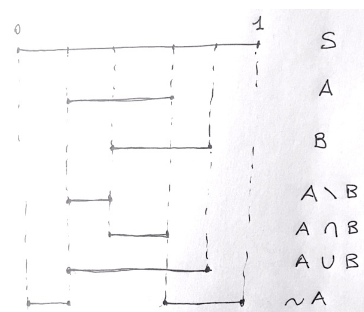

Figura 2: Eventi definiti come intervalli nello spazio degli stati continuo $S = \{x : x \in [0,1]\}$

Anche qui possiamo definire eventi come intervalli in $S = \{x : x \in [0,1]\}$ ed eventi come combinazioni di eventi, come mostrato in Figura 2.

Osservazione 1.5 (L'insieme delle parti) *Quanti eventi sono possibili in S?*

L'insieme delle parti é l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S

Consideriamo il caso semplice del lancio di moneta, con $S = \{T, C\}$, con $\sharp(S) = 2$. Possiamo enumerare i casi possibili come nella Figura 3

Abbiamo che il numero é pari a:

$$4 = 2^2 = 2^{\sharp(S)} = 2^{card(S)} = 2^{|S|}$$

dove $|S|$ é il numero di elementi di S.

*Il numero $2^{|S|}$ é il numero di sottoinsiemi contenuti nell'*insieme delle parti, *o insieme di potenza (power set) di S solitamente indicato con $\mathcal{P}(S)$*

In generale non necessariamente tutti i possibili sottoinsiemi appartenenti all'insieme di potenza devono costituire eventi di interesse. Pertanto denoteremo con $\mathcal{F}$ la famiglia o classe di sottoinsiemi di S che consideriamo eventi (di interesse)

Possiamo dare la seguente

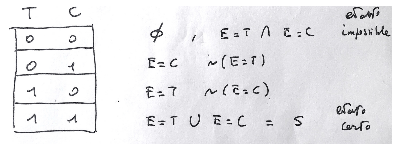

Figura 3: Eventi in $S = \{T, C\}$

Si assume nella definizione la numerabilitá finita o infinita dell'insieme di eventi

Definizione 1.6 (σ-algebra) *Se valgono le sequenti proprietá:*

1. $\sim S \in \mathcal{F}$,

2. *Se* $F \in \mathcal{F}$, *allora* $\sim F \in \mathcal{F}$,

3. *Se* $F_1, F_2, \cdots \in \mathcal{F}$, *allora*
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathcal{F},$$

F é una σ-algebra

Le proprietá enunciate vengono dette di chiusura. Poiché $\bigcap_i F_i = \sim (\bigcup_i \sim F_i)$, ne segue che una σ-algebra é chiusa anche rispetto a intersezioni numerabili

Alcuni esempi di σ-algebre:

- la σ-algebra banale $\mathcal{F} = \{\emptyset, S\}$;
- l'insieme delle parti $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$;
- la σ-algebra generata da $A \subseteq S$, $\mathcal{F}_A = \{\emptyset, A, \sim A, S\}$;

Nel caso del continuo la definizione di una σ-algebra richiede maggiore attenzione. Senza entrare nei dettagli (che esulano dagli obiettivi di questo corso), nel caso in cui si assuma uno spazio degli stati continuo $S = \mathbb{R}$, é possibile definire famiglia $\mathcal{I}$ di intervalli (aperti) sui reali $\mathbb{R}$ per ottenere una σ-algebra generata da $\mathcal{I}$ chiamata σ-algebra di Borel:
$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I}).$$

Definita che sia la σ-algebra $\mathcal{F}$, diciamo che la coppia $(S, \mathcal{F})$ rappresenta uno *spazio probabilizzabile*.

2 *Gli assiomi di Kolmogorov*

Sia dato lo spazio probabilizzabile $(S, \mathcal{F})$.

La definizione assiomatica di probabilitá secondo Kolmogorov

Definizione 2.1 *Una funzione*
$$P : F \in \mathcal{F} \to [0, 1]$$
é detta misura di probabilitá*, o semplicemente* probabilitá*, quando soddisfa i seguenti tre assiomi (dovuti a Kolmogorov):*

1. ***Non negatività***
$$P(F) \geq 0$$

2. ***Additività***: *se prendiamo due eventi la cui intersezione è nulla,*

$$A \cup B = \emptyset,$$

la probabilità dell'evento unione è dato dalla somma della probabilità dei singoli eventi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

3. ***Normalizzazione***:

$$P(S) = 1.$$

Definizione 2.2 *La terna* $(S, \mathcal{F}, P)$ *è detta* spazio di probabilità.

3 *Proprietá derivanti dagli assiomi*

Prop. 3.1

$$0 \leq P(F) \leq 1. \tag{1}$$

Dimostrazione *Da assiomi 1 e 3:*
$0 = \frac{\sharp(0)}{\sharp(S)} \leq \frac{\sharp(F)}{\sharp(S)} \leq \frac{\sharp(S)}{\sharp(S)} = 1$

Prop. 3.2 (Regola del complemento)

$$P(\sim A) = 1 - P(A). \tag{2}$$

Dimostrazione $S = A \cup \sim A$
$P(S) = P(A \cup \sim A)$ *per A3*
$= P(A) + P - (\sim A)$ *per A2*
$= P(A) = 1 - P(\sim A)$

Esempio 3.3 *Condideriamo lo spazio campionario del lancio di moneta:* $S = \{T, C\}$.
Se $P(T) = \frac{1}{2}$ *allora* $P(C) = P(\sim T) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Se $P(T) = \frac{3}{4}$ *allora* $P(C) = P(\sim T) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

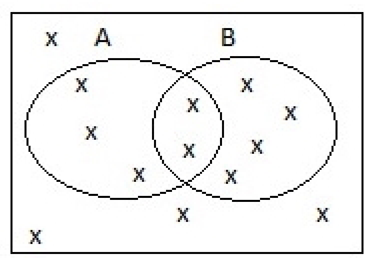

Figura 4: Rappresentazione del problema affrontato dal Principio di Inclusione-esclusione

Si consideri ora il caso rappresentato in Figura 3. In questo caso, per il calcolo di $P(A \cup B)$ non puo' essere utilizzata direttamente l'additivitá (Assioma 2): infatti, $A \cap B \neq \emptyset$. La non disgiunzione comporterebbe, il doppio conteggio degli esiti contenuti nell'intersezione dei due eventi:
$\sharp(A \cup B) = 9$
$\sharp(A) = 5$
$\sharp(B) = 6$
$\sharp(A \cup B) = 9 \neq 11 = 5 + 6 = \sharp(A) + \sharp(B)$
E' cioé necessario sottrarre $2 = \sharp(A \cap B)$
L'additivitá viene generalizzata dalla seguente:

Prop. 3.4 (Principio di inclusione–esclusione) *Dati due eventi A e B non disgiunti, $A \cap B \neq \emptyset$,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{3}$$

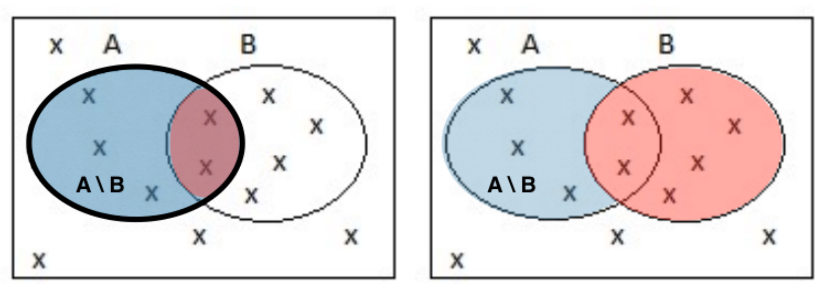

Figura 5: Con riferimento alla Figura 3: decomposizione di A (sinistra) e $A \cup B$ (destra) su insiemi disgiunti

Dimostrazione *Risulta evidente dalla Figura 5 che sono valide le seguenti decomposizioni*

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

dove $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = \emptyset$ e $(A \setminus B) \cup B = \emptyset$. Applicando a entrambe la misura di probabilitá, per additivitá (A2):

$$P(A) = P(A \setminus B) + (A \cap B) \rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

Sostituendo $P(A \setminus B)$ si ottiene la (3).

E’ possibile estendere l’additivitá come segue

Prop. 3.5 (Principio di additivitá generalizzata) *Si considerino una serie di eventi $F_1, F_2, F_3, ... \in \mathcal{F}$ tali che $F_i \cap F_j = \emptyset, i \neq j$. Allora:*

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3 ...) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) + ... \tag{4}$$

Schema della dimostrazone *Si nota che*

$$P(F_1 \cup F_2 \cup F_3) = P((F_1 \cup F_2) \cup F_3) = P(F_1 \cup F_2) + P(F_3) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3),$$

e si procede per induzione

3.1 *Principio di Inclusione–Esclusione generalizzato*

E' possibile generalizzare anche il PIU. Per tre insiemi:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ + P(A \cap B \cap C) \\ - P(A \cap B) \\ - P(B \cap C) \end{aligned}$$

Per piú di tre insiemi le cose si complicano e a volte é utile ricorrere a metodi alternativi.

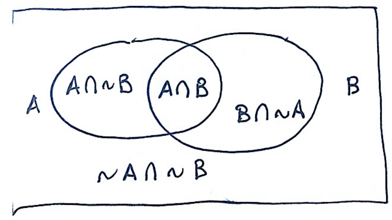

Figura 6: Tecnica di deframmentazione

- *Metodo del complemento*: Individuo l'evento complementare all'unione :

  $$\sim A \cup \sim B$$

  Dunque:

  $$A \cup B = S - (\sim A \cap \sim B)$$

  da cui $P(A \cup B) = 1 - P(\sim A \cap \sim B)$

  Esempio 3.6 $\mathcal{E}$ = *lancio di tre monete (o tre ripetizioni del lancio di una moneta)*

  L'evento di interesse é:

  *E =**almeno** una volta testa*

  In questo caso $\sharp(S) = 2^3$*, e dovrei calcolare* $P(E)$ *misurando l'insieme di tutte le combinazioni con almeno una volta testa,* $\{CCT, CTC, CTT, \cdots\}$

  La negazione di E risulta essere l'evento unico

  *$\sim E$ ="**sempre** croce"*

  Dunque,

  $$P(E) = 1 - \frac{\sharp(\sim E)}{\sharp(S)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

- *Metodo della deframmentazione*:

  Si decompone lo spazio degli eventi in "frammenti" di eventi disgiunti fra loro (cfr. Figura 3.1)

  $$A \cup B = (A \cap \sim B) \cup (\sim A \cap B) \cup (A \cap B)$$

  e si applica direttamente l'additivitá generalizzata come definita in (4)

4 Ulteriori considerazioni sul concetto di probabilitá

Abbiamo fatto uso di due definizioni di probabilitá

- Definizione " semantica" in termini di misura :

$$P(F) = \frac{\sharp(F)}{\sharp(S)}$$

- Definizione formale, ovvero come la funzione

$$P : F \in \mathcal{F} \to [0,1]$$

  che soddisfa gli assiomi di Kolmogorov

  Ovviamente, la prima é compatibile con la seconda, per esempio

$$0 \leq P(F) = \frac{\sharp(F)}{\sharp(S)} \leq 1$$

  sotto opportune assunzioni. Queste riguardano

- Caratteristiche dello spazio:
  - discreto vs. continuo
  - numerabile vs. non numerabile
  - finito vs. infinito
- Ipotesi a priori sul modello probabilistico

Per esempio, la definizione di misura $\sharp(F)$ vale sicuramente se lo spazio é numerabile (ogni elemento é in corrispondenza biunivoca con un indice $k \in \mathbb{N}$). Inoltre, per la maggior pare degli esperimenti utilizzati (monete, dadi, ecc.)

$$\sharp(S) = card(S) < \infty,$$

quindi uno spazio campionario non solo numerabile ma anche finito.

Per questi stessi esperimenti abbiamo peró assunto l'ipotesi implicita di un modello probabilistico uniforme: siamo disposti a scommettere la stessa cifra sugli esiti T o C, giacché se la moneta non é sbilanciata ripetendo un numero grande di lanci ciascun esito si presenterebbe nel 50% dei casi. Formalmente, l'equivalenza tra le due definizioni di probabilitá vale sotto l'assunzione del seguente modello.

Definizione 4.1 (Modello uniforme finito) *Lo spazio di probabilitá $(S, \mathcal{F}, P)$ é un modello equiprobabile se*

1. $card(S) \in \mathbb{N}$ *e* $card(S) < \infty$;

2. $\mathcal{F} = \mathcal{P}(S)$, *l'insieme delle parti di S;*

3. $\forall \omega \in S$, $P(\omega) = costante$

In tal caso si puó formalmente dimostrare che

$$\forall \omega \in S, P(\omega) = \frac{1}{card(S)}$$

$$\forall F \in \mathcal{P}(S), P(F) = \frac{card(F)}{card(S)} = \frac{\sharp(F)}{\sharp(S)}$$

Nel caso di un S non numerabile, le cose si complicano.

Si consideri il classico esempio di voler calcolare la probabilitá di centrare il bersaglio nel gioco delle freccette (dunque un problema dove lo spazio campionario é un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$). In questo caso (cfr- Figura 4), intuitivamente non ha senso misurare il punto esatto dove si conficca la freccetta; tecnicamente, il punto ha misura nulla. In uno spazio continuo, conviene definire gli eventi come sottoinsiemi aperti di S - in pratica si suddivide il bersaglio in anelli concentrici fino a definire il centro pieno (bull's eye)- nella fattispecie aree,

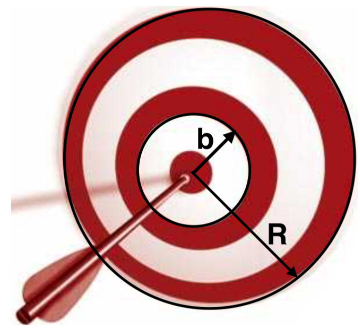

Figura 7: Definizione del problema delle freccette

$$P(C) = \frac{Area(C)}{Area(Board)} = \frac{\pi b^2}{\pi R^2} = \frac{b^2}{R^2}$$

In generale, su $\mathbb{R}$ (procedura generalizzabile ad $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ecc.) si definisce un insieme di intervalli (aperti), $\mathcal{I}$, ottenendo l'equivalente di una σ-algebra nel continuo, ovvero una σ-algebra di Borel generata da $\mathcal{I}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{I})$, che viene utilizzata per definire una misura di probabilitá nel continuo, e estende a spazi continui la σ-algebra $\mathcal{F}$ finora utilizzata.