Modelli probabilistici notevoli

17 maggio 2017

Consideriamo il seguente schema, facendo riferimento ad un generico tempo t che puó essere misurato nel continuo o nel discreto. Nel caso discreto i valori $t = 1, 2, 3, \cdots$ possono essere considerati una successione di prove (e.g., lancio ripetuto di una moneta)

1. *Esperimento di conteggio*: fissiamo l'intervallo di tempo T e contiamo il numero X di eventi di interesse:
   (a) nel caso di tempo discreto (numero di prove) la V.A X segue una **distribuzione Binomiale**;
   (b) nel caso continuo la V.A X segue una **distribuzione di Poisson**;
2. *Esperimento sui tempi di attesa*: non fissiamo T, ma determiniamo quanto tempo $X = t$ occorre aspettare per l'occorrenza del primo evento di interesse.
   (a) nel caso di tempo discreto (numero di prove) la V.A X segue una **distribuzione geometrica**;
   (b) nel caso continuo la V.A X segue una **distribuzione esponenziale negativa**;

Fatta eccezione per la distribuzione esponenziale, tutto le altre sono distribuzioni discrete.

1 *Distribuzione Binomiale*

Fissiamo un numero di prove, ad esempio $T = n = 3$, e vogliamo contare quanti successi $X = x$ si verificano su n prove. Consideriamo come esempio il lancio ripetuto di una moneta dove ciascun lancio é Bernoulliano ovvero é campionato dalla distribuzione $Bern(p)$

Schematizziamo l'albero di probabilitá dell'esperimento come in Figura 1.

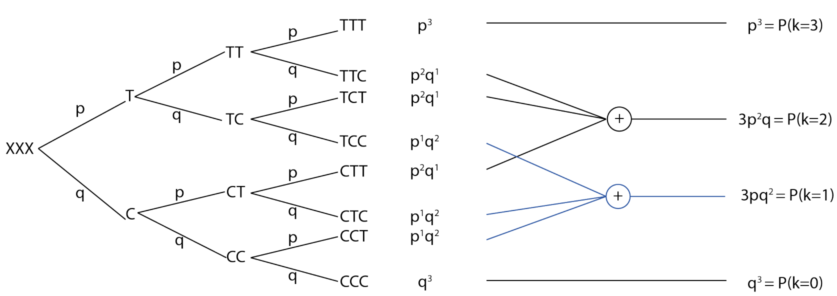

Figura 1: Chance tree per il lancio di tre monete con $X \sim Bern(p)$ con $q = 1 - p$, dove si vuole determinare la probabilitá di $P_X(X = k)$ di avere k successi (rappresentati dall'evento Testa)

Ne risulta le seguente distribuzione di massa (PMF) per $X = 0, 1, \cdots, n$

$$P_X(X = 0) = 1p^0q^3 \quad (1)$$
$$P_X(X = 1) = 3p^1q^2 \quad (2)$$
$$P_X(X = 2) = 3p^2q^1 \quad (3)$$
$$P_X(X = 3) = 1p^3q^0 \quad (4)$$

Notiamo che la PMF é sintetizzabile in due componenti

1. Componente di conteggio (1-3-3-1): cioè quante sequenze per hanno contribuito a determinare la probabilitá di ciascun risultato $x = 0, 1, \cdots, n$ (cfr, Figura 1);

2. Componente probabilistica($p^x q^{n-x}$): cioè la probabilità della sequenza con x successi su n.

Supponiamo ora che il risultato di un esperimento di $n = 3$ abbia dato $x = 2$ teste e $n - x = 1$ croci.

Risultati distinguibili: se i risultati sono distinguibili, non ho solo sequenze del tipo TT e CC ma posso distinguere ad esempio un risultato T_1 da una seconda testa T_2. La situazione é riassunta in tabella 1.

$T_1T_2C_1$	$T_1C_1T_2$	$C_1T_1T_2$
$T_2T_1C_1$	$T_2C_1T_1$	$C_1T_2T_1$

Tabella 1: Schema con risultati distinguibili

Nel nostro caso si potrebbero avere 6 possibili risultati, ovvero le permutazioni

$$n! = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad (5)$$

.

Teste non distinguibili: Nel caso in cui $T_1 = T_2 = T$. La tabella precedente "collassa" nella riga inferiore della tabella seguente

$T_1T_2C_1$	$T_1C_1T_2$	$C_1T_1T_2$
$T_2T_1C_1$	$T_2C_1T_1$	$C_1T_2T_1$
TTC_1	TC_1T	C_1TT

Tabella 2: Schema con teste indistinguibili

Nell'ultima riga abbiamo solo 3 possibili casi, ovvero:

$$\frac{n!}{x!} = \frac{6}{2} = 3, \quad (6)$$

dove $x!$ conteggia le possibili permutazioni sulle teste: T_1T_2 e T_2T_1.

Nell'esempio avevamo un unico risultato C_1 $(n - x = 1)$, ma nel caso $n = 3, x = 1, n - x = 2$ potremmo ripetere lo stesso ragionamento per il risulati "croce" dividendo $n!$ per $(n - x)!$.

Dunque nel caso più generale di risultati indistinguibili per tempo di accadimento si dividerebbe per $x!(n-x)!$ ottenendo così

$$C(n,x) = \frac{n!}{n!(n-x)!} \tag{7}$$

ovvero il coefficiente binomiale $C(n,x)$ che conteggia le combinazioni di n elementi di classe x, senza ripetizione.

Ricomponendo parte combinatoria e parte probabilistica otteniamo la distribuzione di probabilità di x successi su n prove ovvero la distribuzione binomiale

$$Bin(x|n,p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{8}$$

Il termine binomiale deriva dal teorema binomiale (o anche formula di Newton, binomio di Newton, sviluppo binomiale) che esprime lo sviluppo della potenza n-esima di un binomio qualsiasi con la formula seguente:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{9}$$

Usando la formula di Newton, é immediata la dimostrazione che $Bin(x|n,p)$ é normalizzata. Infatti, per $a = p, b = q$ e ricordando che $q + p = 1$

$$\sum_{x=0}^{n} Bin(x|n,p) = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = (p+q)^n = 1^n = 1 \tag{10}$$

1.1 *Forma della binomiale $Bin(n,p)$ al variare di p e n*

Al variare dei parametri p e n varia la forma della distribuzione, come mostrato in Figura 2.

Se p è piccolo (0.1) la probabilitá di successo é bassa (eventi rari) e nel limite $n \to \infty$ viene approssimata da una Poissoniana. Se $p = 0.5$, nel limite $n \to \infty$ tende alla distribuzione continua Gaussiana (Teorema di De Moivre-Laplace, dimostrato più avanti nel corso)

2 *Calcolo del valore atteso e della varianza*

Valore medio Per definizione $E[X] = \sum_{x=0}^{n} xBin(x \mid n,p)$. Pertanto:

$$E[X] = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x!)} p^x q^{n-x} = \tag{11}$$

Porto fuori dallla sommatoria , n e p

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x} = np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1!)(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x} \tag{12}$$

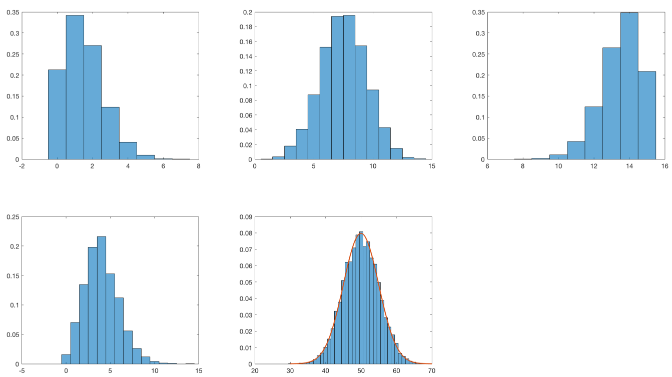

Figura 2: Forma della binomiale $Bin(n, p)$ al variare di p e n ottenuta con l'istogramma normalizzato di 10000 punti campionati dalla distribuzione. In alto a sinistra: $n = 15, p = 0.1$. In altro, centrale: $n = 15, p = 0.5$. In alto a destra: $n = 15, p = 0.9$. I due grafici in basso mostrano il tendere della Binomiale alla distribuzione di Poisson (sinistra, $n = 100, p = 0.04$) e Normale (destra, $n = 100, p = 0.5$). In quest'ultimo caso si traccia anche l'approssimazione Gaussiana (curva continua) nel limite stabilito dal Teorema di De-Moivre Laplace, $\mu = np, \sigma = \sqrt{npq}$. Per la simulazione si veda il codice Matlab demoBin.m

Ponendo $n - x = (n-1) - (x-1)$:

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!((n-1)-(x-1))!} p^{x-1} q^{((n-1)-(x-1))} \tag{13}$$

Con le sostituzioni:

$$n - 1 = m$$

$$x - 1 = j$$

si ha che $n = m + 1$, e che per $x = 1$ vale $j = 0$. Quindi,

$$E[X] = np \sum_{j=0}^{m+1} \binom{m}{j} pq^{m-j} \tag{14}$$

Ma $\binom{m}{j} = 0$ se $j = m + 1$, pertanto usando il teorema binomiale

$$E[X] = np \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} pq^{m-j} = np(p+q)^m = np \tag{15}$$

Varianza. Applicando la definizione di varianza e il valore atteso $E[X] = np$ appena calcolato:

$$\sigma^2 = var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - n^2 p^2 \tag{16}$$

Calcolo il momento secondo ponendo $x^2 = x^2 - x + x = x(x-1) + x$:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{n} x^2 \frac{n!}{x!(n-x)!} =$$

$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} =$
$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} + E[X](17)$

Sostituisco $E[X] = np$:

$$E[X^2] = \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + np = n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + np \tag{18}$$

Pongo:

$$x - 2 = j \rightarrow x = j + 2$$

$$x = 2 \rightarrow j = 0$$

e usando il binomio di Newton:

$$E[X^2] = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{j!(n-j-2)!} p^j q^{n-j-2} + np = n(n-1)p^2 = n^2p^2 - np^2 + np \tag{19}$$

dove si é utilizzata la sostituzione $m = n - 2$ e il binomio di Newton con $(p+q)^m = (1)^m$

Infine:

$$\sigma^2 = E[X^2] - E[X]^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq \tag{20}$$

da cui la deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{npq} \tag{21}$$

3 Distribuzione di Poisson

La distribuzione di Poisson é tipicamente utilizzata per caratterizzare la distribuzione del numero di eventi (discreti) rari che avvengono in un tempo continuo.

Interpretando l'accadimento o no di un evento come un successo/insuccesso, possiamo ottenere la distribuzione di Poisson, $Pois(k \mid \mu)$ dalla binomiale, $Bin(x \mid p, n) \rightarrow Pois(x \mid \mu)$, con p piccolo e n grande, ovvero sotto le seguenti assunzioni

1. facciamo crescere il numero di tentativi: $n \rightarrow \infty$;

2. riduciamo la probabilitá di successo nel singolo tentativo: $p \rightarrow 0$

Ció corrisponde a studiare eventi estremamente improbabili (rari, $k \ll n$)

Si noti che sotto tali ipotesi il valore di aspettazione della binomiale si conserva:

$$\mu = np = cost.$$

Riscriviamo la binomiale come:
$Bin(x \mid p, h) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x!} p^x q^{n-x}$
Se $x \ll n$ valgono le seguenti approssimazioni:

$$n(n-1) \simeq n^2$$
$$n(n-1)(n-2) \simeq n^3$$
$$\dots$$
$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \simeq n^k$$

Inoltre, se $p \to 0$, allora $q \to 1$.

Dunque:

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0} Bin(x \mid p, n) = \frac{n^x}{x!}p^x = \frac{(np)^x}{x!} = \frac{\mu^x}{x!} = \widetilde{f}(x \mid \mu)$$

dove si é posto $\mu = np$. La forma ottenuta non é normalizzata, infatti usando la serie esponenziale:

$N = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu^x}{x!} = e^{\mu}$

Normalizziamo dividendo a destra e sinistra per e^{μ}:

$$f(x \mid \mu) = \frac{\widetilde{f}(x \mid \mu)}{N} = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} = Pois(x \mid \mu)$$

3.1 *Valore atteso e varianza della Poissoniana*

Per costruzione il valore atteso é

$$\mu = np.$$

Nello stesso modo, avendo dalla binomiale $var(X) = npq$, questo nel limite

$$n \to \infty, p \to 0 (q \to 1) \Rightarrow var(X) \simeq np = \mu$$

Verifichiamo questo ragionamento intuitivo con il calcolo esatto di valore atteso e varianza.

Calcolo esatto di $E(X)$

$$E[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} =$$
$$\sum_{x=0}^{+\infty} x\frac{\mu^x}{x(x-1)!}e^{-\mu} =$$
$$\mu e^{\mu} \sum_{x=1} \frac{\mu^{(x-1)}}{\{x-1\}!}$$

Poniamo:

$x - 1 = j$ dove $x = 1, \Rightarrow\to 0$

Otteniamo quindi:

$$E[X] = \mu e^{-\mu} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\mu^j}{j!} = \mu e^{-\mu} e^{\mu} = \mu$$

Calcolo esatto di $var(X)$

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \mu^2$$

Calcolo il momento secondo:

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{+\infty} x^2 \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}$$

Poniamo $x^2 = x^2 - x + x = x(x-1) + x$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1) \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} + \sum_{x=0}^{+\infty} x \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} =$$
$$\sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1) \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu} + E[X] =$$
$$e^{-\mu} \sum_{x=0}^{+\infty} x(x-1) \frac{\mu x}{x(x-1)(x-2)!} + E[X] =$$
$$\mu^2 e^{\mu} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu^{x-2}}{(x-2)!} + E[X]$$

Ponendo: $x - 2 = j$ e usando la serie esponenziale:

$$E[X^2] = \mu^2 e^{-\mu} e^{\mu} + E[X] = \mu^2 + \mu$$

Infine:

$$var(X) = E[X^2] - \mu^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu \tag{22}$$

Da cui la deviazione standard $\sigma = \sqrt{\mu}$.

3.2 *Approssimazione poissoniana della Binomiale*

Quanto fatto finora, suggerisce che, nel caso di n grande e p piccolo, possiamo approssimare la distribuzione binomiale con una poissoniana di parametro $\mu = np$:

$$Bin(x \mid n, p) \simeq \frac{(np)^x}{x!} e^{-(np)}$$

Esempio 3.1 *Noleggio un'auto. Questa,* 2 *volte su* 100 *non si avvia. Se in vacanza la avvio* 200 *volte:*

1. Quale é la media dei fallimenti?

   Abbiamo che $n = 200$ *(grande),* $p = \frac{2}{100} = 0.02$ *(piccolo):*

$$np = 200 \times \frac{2}{100} = 4$$

2. Quale é la probabilitá che funzioni sempre?

   Approssimo con Poisson, $\mu = np$, dove x indica il numero di "mancati avviamenti"

$$Bin(x = 0 \mid n = 200, p = 0.02) \simeq Pois(x = 0 \mid \mu = np) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu} = \frac{4^0}{0!}e^{-4} \approx 0.018$$

Consideriamo ora un esempio di *processo di Poisson*, un processo in cui gli eventi vengono generati nel tempo secondo la legge di Poisson.

Esempio 3.2 *Supponiamo che durante un temporale i lampi vengono generati con legge poissoniana e siano osservabili con una frequenza o **rate***

$$\lambda = \frac{2}{100} = \frac{\texttt{lampi}}{\texttt{sec}}$$

Supponiamo di fotografare con un tempo di apertura

$$t = 200 \ \texttt{sec}$$

Mediamente riusciró a "catturare"

$$\mu = \lambda t = \frac{2}{100} \times 200 = 4 \ \texttt{lampi}$$

1. Qual é la probabilitá che non vi siano lampi?

   Poiché il processo é poissoniano di media μ:

$$Pois(x = 0 \mid \mu = \lambda t) = \frac{(4)^0}{0!}e^{-4} = e^{-4} \approx 0.018$$

2. Qual é la probabilitá che vi sia esattamente un lampo?

$$Pois(x = 1 \mid \mu = \lambda t) = \frac{(4)^1}{1!}e^{-4} = 4e^{-4} \approx 0.07$$

3. Qual é la probabilitá che vi siano almeno due lampi?

$$Pois(x > 1 \mid \mu = \lambda t) = 1 - \{Pois(x = 0 \mid \mu = \lambda t) + Pois(x = 1 \mid \mu = \lambda t)\} \approx 0.908$$

4 *Esponenziale negativa*

Riprendiamo l'ultimo esempio trattato (lampi) di eventi rari generati da un Processo di Poisson.

Nell'esempio abbiamo considerato un tempo t dove gli eventi vengono generati con un **rate** (tasso di produzione)

$$\lambda = \frac{\texttt{n. eventi}}{\texttt{tempo}}$$

Intuitivamente, la media degli eventi generati é

$$\mu = \lambda t$$

.

e poiché il processo é poissoniano la probabilitá di x eventi

$$Pois(x \mid \mu = \lambda t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t}$$

Supponiamo ora di dividere l'asse del tempo in piccoli intervalli dt. Avremo

$$n = \frac{t}{dt}$$

intervalli.

Ci chiediamo ora qual é la probabilitá p che un evento accada nel piccolissimo intervallo dt (cfr., Figura 3). Intuitivamente se $dt \to 0$ allora tale probabilitá diventa sempre piú piccola: $p \to 0$. Come esprimiamo la probabilitá di cadere nell'intervallino dt?

Ricordiamo che la distribuzione di Poisson é stata derivata dalla Binomiale per cui $\mu = E[X] = np$. Confrontando con $\mu = \lambda t$ e utilizzando la costruzione appena descritta:

$$\mu = np = \lambda t = \lambda t \frac{dt}{dt} = \frac{t}{dt} \lambda t dt,$$

dunque, per confronto, $n = \frac{t}{dt}$ e

$$p = \lambda dt,$$

come era lecito aspettarsi: maggiore il rate, maggiore la probabilitá di avere un evento in dt.

E' possibile a questo punto modellare la distribuzione dei tempi di attesa $t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R}^+$ che intercorrono fra gli eventi del processo, ovvero le realizzazioni $T = t_i$ di una VA temporale continua $T \in \mathbb{R}^+$.

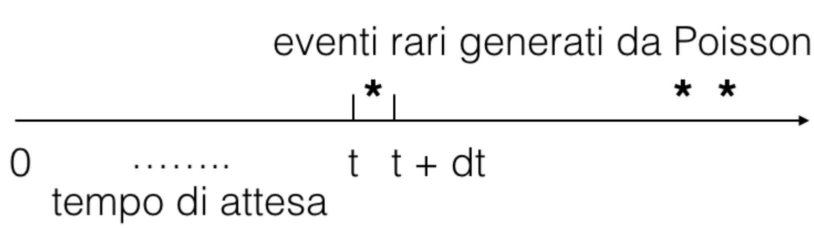

Figura 3: Eventi generati da un processo poissoniano (*) e tempi di attesa

Azzeriamo il cronometro a $T = 0$ e chiediamoci: qual é la probabilitá che un evento accada dopo $T = t$ secondi, ovvero qual é la probabilitá di attendere $T = t$ secondi prima che l'evento accada? La situazione é rappresentata in Figura 3.

Siamo nel continuo e dunque non ha senso determinare $P_T(T = t)$ (insieme di misura nulla). Concedendo un piccolo margine dt possiamo determinare

$$P_T(t \leq T \leq t + dt) \approx f_T(t)dt$$

dove $f_T(t)$ é la densitá di probabilitá del tempo di attesa che vogliamo determinare.

E' chiaro che

$$\begin{aligned} P_T(\{t \leq T \leq t + dt\}) = & \\ & P_T(\{\texttt{nulla é accaduto prima di } t\} \cap \{\texttt{l'evento accade in } dt\}) = \\ & P_T(\{\texttt{nulla é accaduto prima di } t\}) P_T(\{\texttt{l'evento accade in } dt\}) \end{aligned}$$

dove si é fatto uso dell'indipendenza fra i due eventi.

Poiché il processo é di Poisson:

$$P_T(\{\texttt{nulla é accaduto prima di } t\}) = Pois(x = 0 \mid \lambda t)$$

e per quanto detto all'inizio

$$P_T(\{\texttt{l'evento accade in } dt\}) = \lambda dt$$

Pertanto

$$P_T(t \leq T \leq t + dt) \approx f_T(t)dt = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} \lambda dt = \lambda e^{-\lambda t} dt$$

e la densitá cercata é:

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

ovvero la distribuzione esponenziale negativa $Exp(t \mid \lambda) = \lambda e^{-\lambda t}$

La pdf $Exp(t \mid \lambda)$ é normalizzata:

$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = \int_0^{\infty} d[-e^{-\lambda t}] = [-e^{-\lambda t}]_0^{\infty} = [e^{-\lambda t}]_{\infty}^0 = 1 - 0 = 1$

e ha un massimo (moda) in $t = 0$: $F(0) = \lambda$

4.1 *Valore atteso*

Usando la definizione di valore atteso e l'integrazione per parti, $\int f(t)g'(t)dt = f(t)g(t) - \int f'(t)g(t)dt$, con $f(t) = t, g'(t) = -e^{-\lambda t}, g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$:

$$\mu = E[t] = \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = [t(-e^{-\lambda t})]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} 1(-e^{-\lambda t})dt = [-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t})]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \tag{23}$$

$$\mu = \frac{1}{\lambda} \tag{24}$$

4.2 Varianza e deviazione standard

Usando la definizione di varianza e il risultato (24)

$$\sigma^2 = var(t) = E[t^2] - E[t]^2 = E[t^2] - (\frac{1}{\lambda})^2 \tag{25}$$

Calcolo il momento secondo $E[t^2]$, integrando per parti, con $f(t) = t^2, g'(t) = -e^{-\lambda t}, g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} E[t^2] &= \int_0^\infty t^2 \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= [t^2(-e^{-\lambda t})]_0^\infty - \int_0^\infty 2t(-e^{-\lambda t})dt = \\ &= 2\frac{\lambda}{\lambda}\int_0^\infty te^{-\lambda t} = \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty t\lambda e^{-\lambda t}dt = \frac{2}{\lambda}E[t] = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (25):

$$\sigma^2 = var(t) = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{26}$$

da cui la deviazione standard:

$$\sigma = \sqrt{var(t)} = \frac{1}{\lambda}. \tag{27}$$

4.3 Esempi relativi alla distribuzione esponenziale

Esempio 4.1 *Il tempo tra una richiesta ad un server e la successiva é distribuito esponenzialmente con densitá $Exp(t \mid \lambda) = 2e^{-2t}$. Mediamente, ogni quantomeno arriva una richiesta?*

$$2e^{-2t} = \lambda e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda = 2,$$

da cui:

$$\mu = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} sec.$$

Il parametro λ puó essere interpretato come un tasso (rate) di decadimento nel tempo. Un tipico esempio é dato nello studio della radioattivitá-

Esempio 4.2 *Atomi di Carbonio 14, Uranio 235 restano integri fino ad un tempo t (stocastico) in cui improvvisamente decadono con emissione di radiazione. In questo caso:*

λ = rate di decadimento .

Dunque la disintegrazione/emissione non ha luogo fino a t con probabilitá $S(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}$

Supponiamo che il rate di decadimento sia di un evento all'ora. Allora, il tempo di vita media τ della sostanza é

$\tau = \mu = \frac{1}{\lambda} = 60'$ (min).

Qui l'unitá di misura SI del rate é un decadimento / sec. = becquerel

Qual é la probabilitá di essere colpiti da radiazione dopo mezz'ora?

La probabilitá $P(t > 30')$ di essere ancora vivi dopo 30 min é data dalla funzione di sopravvivenza:

$$S(t) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{1}{60'}30'} = e^{-\frac{1}{2}} \simeq 0.60$$

mentre quella di essere sottoposti a radiazione prima di $30'$ é:

$F(t) = 1 - S(t) = 1 - 0.60 = 0.40$

Di particolare interesse in radioattività é il tempo di dimezzamento $t_{\frac{1}{2}}$ *di un isotopo che corrisponde alla mediana della distribuzione esponenziale. Questa si ottiene ponendo $F(t) = S(t) = \frac{1}{2}$:*

$e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\lambda t = -\ln 2 \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\lambda} = \tau \ln 2 \simeq 0.03\tau$

Si noti che la vita media ha un range molto ampio, $10^{-6} \leq \tau \leq 10^{9}$

4.4 *Proprietá di perdita della memoria*

La distribuzione esponenziale gode della proprietį essere senza memoria (memoryless). Si considerino due eventi A e B:

- A = "non si sono verificati eventi di interesse fino a $t + \Delta t$", ovvero: $A = \{T > t + \Delta t\}$
- B = "non si sono verificati eventi di interesse fino a t", ovvero: $B = \{T > t\}$.

Vogliamo determinare la probabilitá (condizionata) di A dato B: $P(\{T > t + \Delta t \mid T > t\})$. Per definizione:

$$P(T > t + \Delta t | T > t) = \frac{P(\{T > t + \Delta t\} \cap \{T > t\})}{P(T > t)}$$

Ovviamente, $A \subseteq B$, e dunque $P(A \cap B) = P(A)$. Pertanto:

$$P(\{T > t + \Delta t\} | \{T > t\}) = \frac{P(\{T > t + \Delta t\})}{P(\{T > t\})} = \frac{e^{-\lambda(t+\Delta t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda \Delta t + \lambda t} = e^{-\lambda \Delta t}$$

In buona sostanza, la probabilitá di ció che puó accadere nell'intervallo Δt non dipende da quanto é accaduto fino a t, ovvero il processo é senza memoria.

5 *Per completezza...la distribuzione geometrica*

L' esponenziale negativa modella la distribuzione dei tempi di attesa di eventi, per esempio generati da un processo di Poisson. Tali tempi sono effettivamente le realizzazione di una VA tempo continua T. Per quanto detto all'inizio, discretizzando T ci si riconduce ad un'attesa sul numero di prove da effettuare prima del verificarsi di un evento di interessa.

La geometrica $G(x \mid p)$ é esattamente la distribuzione che descrive il numero di prove x che occorre effettuare prima che un evento di probabilitá p accada .

Consideriamo il caso più semplice: il lancio di moneta e gli eventi ad essa associati: testa (T) e croce (C). Avremo che:

$P_X(X = 1) = p \to$ Probabilità che l'evento "testa" accada al primo lancio.

$P_X(X = 2) = P(C)P(T) = q \cdot p \to$ Probabilità che l'evento "testa" accada al secondo lancio.

$P_X(X = 3) = P(C)P(C)P(T) = q^2 \cdot p \to$ Probabilità che l'evento "testa" accada al terzo lancio.

quindi all'ennesimo tentativo:

$P(X = n) = q^{x-1} \cdot p = G(x \mid p)$

$G(x \mid p)$ é la distribuzione geometrica.

Possiamo affermare che quando p è grande la funzione decresce velocemente, mentre quando p è piccola, decresce lentamente. Un esempio é mostrato in Figura 4

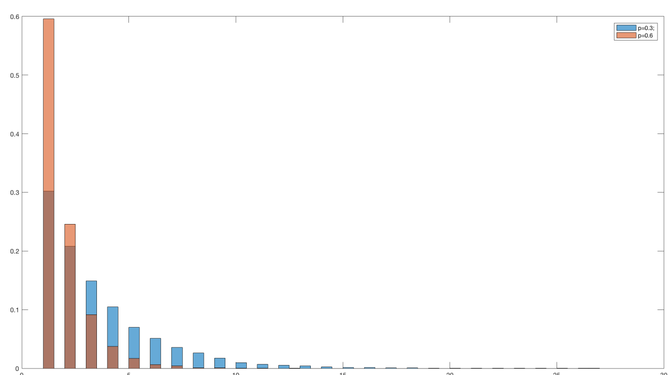

Figura 4: Forma della distribuzione geometrica $G(x \mid p)$ al variare di p ottenuta calcolando l'istogramma normalizzato di 10000 punti campionati dalla distribuzione nei casi $p = 0.3$ e $p = 0.6$. Per confrontare, i due istogrammi sono stati sovrapposti. Per la simulazione si veda il codice Matlab demoGeo.m

Esempio 5.1 *In un'analisi di laboratorio, un esperimento ha il* 30% *di possibilità di dare una risposta positiva. Quante prove devo effettuare per avere il 90% di probabilità di avere esito positivo?*

Notiamo che:

$P(X = 1) = p = 0.3$

$P(X = 2) = p \cdot q = 0.3 \cdot 0.7 = 0.21$

$\vdots$

$P(X = 6) = p \cdot q^5 = 0.88$

$P(X = 7) = p \cdot q^6 = 0.91$

Devo effettuare almeno 7 prove per raggiungere il 90% di probabilità di avere esito positivo.

5.1 Normalizzazione

La distribuzione é normalizzata. Infatti:
$\sum_{x=1}^{n} G(x \mid p) = \sum_{x=1}^{n} q^{x-1}p = \sum_{x=1}^{n} q^{x-1}$
$\Downarrow$ (ponendo $x-1=k; x=1, k=0$)
$= p\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (usando la somma della serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$)
$= p\frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$

5.2 Valore atteso

$$E[X] = \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}p = p\sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1} =$$

Notando che

$$xq^{x-1} = \frac{d}{dq} \cdot q^x$$

allora:

$$\begin{aligned} E[X] &= p\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq} \cdot q^x \\ &= p\frac{d}{dq}\left[\sum_{x=1}^{\infty} q^x\right] \\ &= p\frac{d}{dq}\left[\sum_{x=1}^{\infty} q^x + q^0\right] \\ &= p\frac{d}{dq}\left[\frac{1}{1-q}\right] \\ &= p\left(-\frac{-1}{(1-q)^2}\right) \\ &= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\mu = E[X] = \frac{1}{p} \tag{28}$$

In buona sostanza, μ ci dice la media dei tempi/tentativi che devo attendere prima che accada il risultato atteso: ovviamente piú la probabilitá p dell'evento é grande, meno devo attendere.

Esempio 5.2 *Calcolare il tempo di attesa in cui si verifichi l'evento "testa" nel lancio di una moneta, con $P(T) = \frac{1}{2}$.*
Sappiamo che $\mu = \frac{1}{p}$
Quindi $\mu = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

5.3 *Varianza*

Usando la proprietá $var(X) = E[X^2] - E[X]^2$ con $E[X] = \frac{1}{p}$:

$$var(X) = E[X^2] - \frac{1}{p^2} \tag{29}$$

Calcolo il momento secondo:

$$E[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{x-1}$$

Di nuovo, notiamo che:

$$\frac{d}{dq}(q^{x+1}) = (x+1)q^x = xq^x + q^x$$

$$\frac{d^2}{dq^2}(q^{x+1}) = \frac{d}{dq}(xq^x + q^x) = x^2 q^{x-1} + xq^{x-1}$$

Dunque:

$$x^2 q^{x-1} = \frac{d^2}{dq^2}(q^{x+1}) - xq^{x-1}$$

Pertanto:

$$E[X^2] = p \sum_{x=1}^{\infty} x^2 q^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}(q^{x+1}) - xq^{x-1} = p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}(q^{x+1}) - E[X]$$

Sviluppando il primo termine

$$\begin{aligned}
& p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}(q^{x+1}) = p \frac{d^2}{dq^2} \left[\sum_{x=1}^{\infty} q^{x=1} \right] \\
& \Downarrow x+1 = k; x = 1 \to k = 2 \\
& = p \frac{d^2}{dq^2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} q^k \right] = p \frac{d^2}{dq^2} \left[\sum_{k=2}^{\infty} q^k + q^1 + q^0 \right]
\end{aligned}$$

Usando la somma della serie geometrica e derivando:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{2(1-q)}{(1-q)^4} = \frac{2}{(1-q)^3} \\
& = p \frac{2}{p^3} = \frac{2}{p^2}
\end{aligned}$$

Dunque:

$$E[X^2] = \frac{2}{p^2} - E[X] = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Si ha infine:

$$var(X) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2} \tag{30}$$

Da cui la deviazione standard:

$$\sigma = \frac{\sqrt{1-p}}{p} = \frac{\sqrt{q}}{p} \tag{31}$$

5.4 Funzione di ripartizione

$$F(x) = P(T \leq x) = \sum_{t=1}^{x} pq^{t-1} = p(q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^{x+1})$$

Calcoliamo:

$$qF(x) = p(q + q^2 + q^3 + \cdots + q^x)$$

Allora:

$$F(x) - qF(x) = p(1 - q^x)$$
$$F(x)(1 - q) = p(1 - q^x)$$

La CDF puó essere scritta come

$$F_X(x) = 1 - q^x \tag{32}$$

La funzione di sopravvivenza sará pertanto:

$$S_X(x) = P_X(X > x) = 1 - F_X(x) = q^x \tag{33}$$

Esempio 5.3 (Roulette Russa) Qual é la probabilitá di essere vivi al terzo tentativo?

N.B.: Vi é una pallottola su 6 *possibili colpi nel tamburo, dunque* $p = \frac{1}{6}$)

Dunque:

$$S(3) = q^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \simeq 0.57$$

5.5 Mediana

Per definizione:

$$F(x) = S(x) = \frac{1}{2}$$
$$q^x = \frac{1}{2}$$
$$x \log q = \log \frac{1}{2} = -\log 2$$
$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-\log 2}{\log q} = -\frac{1}{\log_2 q}$$

Per esempio, se $G(x \mid p = \frac{1}{6})$:

$$x_{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\log_2\left(\frac{5}{6}\right)} \simeq 3.802 \simeq 4$$

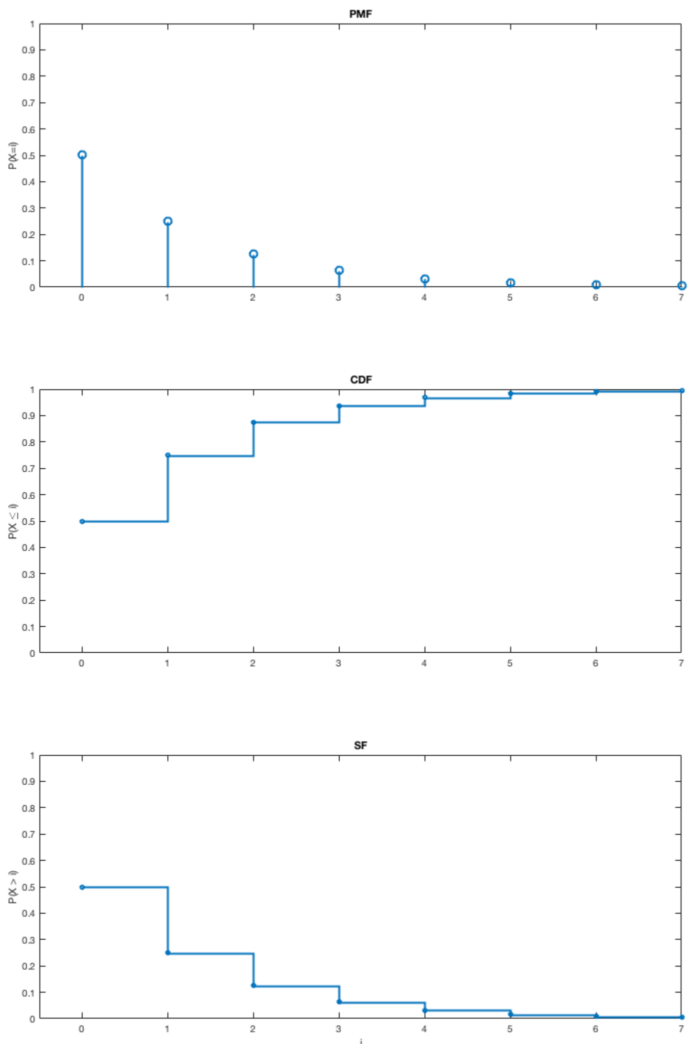

Figura 5: Distribuzione geometrica con parametro $p = 0.5$ e relative CDF $F(i)$ e funzione di sopravvivenza $S(i)$ Per la simulazione si veda il codice Matlab demoGeoCDF.m

5.6 Confronto fra distribuzione Geometrica ed Esponenziale

In linea di principio avremmo potuto ottenere la distribuzione esponenziale come il caso continuo ($n \to \infty$) della geometrica Si considerino le seguenti corrispondenze:

	$G(x \mid p)$	$Exp(t \mid \lambda)$
Densitá	pq^{x-1}	$\lambda e^{-\lambda t}$
CDF	$1 - q^x$	$1 - e^{-\lambda t}$
Sopravv.	q^x	$e^{-\lambda t}$
Media	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{\lambda}$
Varianza	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

Viene naturale considerare la seguente corrispondenza:

$$q^x \longleftrightarrow e^{-\lambda t}$$

Mostriamo che le due forme sono equivalenti:

$$S(x) = q^x = e^{\ln q^x} = e^{x \ln q} = e^{-(\ln \frac{1}{q})x}$$

Sostituendo: $\ln \frac{1}{q} \leftarrow \lambda$, $x \leftarrow t$

$$S(t) = e^{-\lambda t}$$